ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
*Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas*

# DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ENERGIA E AUTOMAÇÃO ELÉTRICAS

# ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

# PEA - LABORATÓRIO DE INSTALAÇÕES ELÉTRICAS

# CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA

**Código: CA**

## SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

O estudo de circuitos de corrente alternada (C.A.) é sobremodo importante dado que a grande maioria das instalações elétricas utiliza este tipo de circuitos.

Nesta apostila, partimos de definições de grandezas periódicas, alternadas e senoidais, que são básicas para estudos de corrente alternada (C.A.). Definimos então a representação fasorial de grandezas senoidais que facilitam sobremodo a manipulação destas grandezas.

Mostramos que a geração de uma f.e.m. senoidal é relativamente simples, através de um esquema ilustrativo de um gerador C.A.. Verificamos então que o conceito de potência elétrica em C.A. exige com que sejam definidas outras grandezas auxiliares e mostramos a relação existente entre potência em circuitos C.A. e C.C..

Apresentamos então os circuitos elementares com excitação senoidal, isto é, um gerador C.A. alimentando uma resistência, uma indutância e uma capacitância, bem como a associação série destes elementos.

Analisamos então os procedimentos para a resolução de circuitos C.A. a partir da analogia com os métodos de resolução de circuitos C.C., vistos anteriormente. Damos destaque para o cálculo de queda de tensão e potências de um circuito monofásico, utilizado em muitas instalações elétricas.

# 2. GRANDEZAS PERIÓDICAS

## *2.1 Definições*

Dada uma função $y = y(t)$, figura 2.1. dizemos que essa função é uma função periódica do tempo quando se verifica a relação:

$$y(t) = y(t + nT) \qquad (2.1)$$

em que $n$ é um número inteiro qualquer. Uma grandeza periódica é aquela que a intervalos de tempo iguais correspondem valores iguais da função. Ao intervalo de tempo, $T$, damos o nome de período. Evidentemente o inverso do período, $f = 1/T$, que recebe o nome de freqüência, representa o número de ciclos que a função descreve na unidade de tempo (segundo). A unidade de freqüência é o Hertz (Hz) que representa o número de ciclos que a função descreve por segundo.

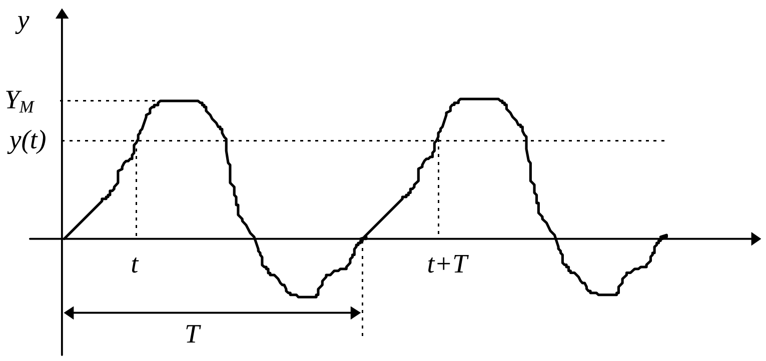



**Figura 2.1 - Função Periódica do Tempo**

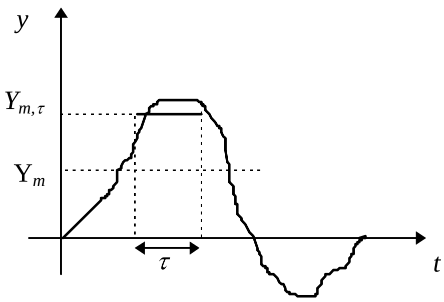



**Figura 2.2 - Valor Médio da Função Periódica**

A cada instante do ciclo, corresponde um valor da função que recebe o nome de valor instantâneo. Ao maior dos valores instantâneos, $Y_M$, dá-se o nome de valor máximo. O valor médio, $Y_m$, num período, é definido como (figura 2.2.):

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T y dt \qquad (2.2)$$

Que representa a relação da área sob a curva e o período *T*.

O valor médio, $Y_{m,\tau}$, numa fração $\tau$ do período, pode ser definido por:

$$Y_{m\tau} = \frac{1}{\tau}\int_\tau y dt \qquad (2.3)$$

O valor eficaz, $Y_{ef}$, é definido como sendo a raiz quadrada do valor médio da função obtida, elevando-se ao quadrado os valores instantâneos existentes num período, isto é:

$$Y_{ef} = Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 dt} \qquad (2.4)$$

Convencionaremos, em tudo quanto segue, designar o valor instantâneo de uma função por uma letra minúscula, os valores máximo, médio e eficaz por uma letra maiúscula acompanhada, respectivamente, por índice: "M", "m", "ef". Salientamos que o valor médio numa fração do período será designado por uma maiúscula com o índice m seguido da fração de período. Os valores eficazes serão indicados, também, por uma letra maiúscula sem índice algum.

### *2.2 Grandezas Alternadas*

Uma grandeza periódica é dita alternada quando seu valor médio num período é nulo. Isto é, quando se verifica a condição:

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T ydt = 0$$

Para as grandezas alternadas o "fator de forma" é definido como sendo a relação entre seus valores eficaz e médio num semi-período. Isto é:

$$A = \frac{Y}{Y_{m,T/2}} \qquad (2.5.)$$

### *2.3 Grandezas Senoidais*

Uma função do tipo:

$$y = Y_M sen\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = Y_M sen(2\pi ft + \alpha) \qquad (2.6)$$

que recebe o nome de função senoidal, é uma função periódica do tempo, pois:

*y (t) = y (t + nT)*

além disso, é uma função alternada, pois:

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T y dt = 0$$

Fazendo-se $\omega$, que é designada por pulsação, igual a $2\pi/T$, resulta:

$$y = Y_M = sen(\omega t + a)$$

onde:

$\omega$ é medido em radianos por segundo (rd/s)

$T$ é medido em segundos (s)

$\alpha$ é medido em radianos (rd)

Para as grandezas senoidais, o valor médio num semi-período é dado por:

$$Y_{MT/2} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} Y_M sen(\varpi t + \alpha)dt =$$

$$\frac{2Y_M}{\varpi T}\left[\cos(\varpi t + \alpha)\right]_0^{T/2} = \qquad (2.7)$$

$$\frac{2Y_M}{\varpi T} 2\cos\alpha = \frac{2Y_M}{\pi}\cos\alpha$$

em particular quando $\alpha$ = 0 resulta:

$$Y_{mT/2} = \frac{2Y_M}{\pi}$$

Da (2.6.) podemos observar que o valor máximo de uma função senoidal, $Y_M$, ocorre nos instantes $t_M$ que tornem unitário o termo

$$sen(2\pi f t + \alpha)$$

isto é para

$$2\pi f t_M + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \qquad (K = 0,\ 1,\ 2...)$$

ou seja:

$$t_M = \left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi - \alpha\right)\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{4} + KT - \frac{\alpha T}{2\pi}$$

Na equação 2.6 temos:

| | | |
|---|---|---|
| $Y_M$ | = | valor máximo da grandeza senoidal, medido numa unidade qualquer |
| $y$ | = | valor da grandeza senoidal no instante t, medido na mesma unidade de que Ym |
| $T$ | = | período da grandeza senoidal, medido em segundos (s) |
| $f = 1/T$ | = | freqüência da grandeza senoidal medida em Hertz (Hz) |
| $t$ | = | instante genérico em que se quer determinar a grandeza senoidal expressa em segundos (s) |
| $\alpha$ | = | fase inicial, ou simplesmente, fase da grandeza senoidal expressa em radianos (rd) |

Na equação 2.6 o termo $2\pi f$, que representa o número de radianos descritos na unidade de tempo, é designado por pulsação angular (rd/s) e representado pelo símbolo $\omega$, isto é:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ou ainda:

$$\omega T = 2\pi$$

Para as grandezas senoidais o valor médio num semi-período depende da fase inicial da grandeza, isto é:

$$Y_{m,T/2} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} Y_M sen(\varpi t + \alpha)dt = \left[\frac{Y_M}{\varpi T/2} - \cos(\varpi t + \alpha)\right]_0^{T/2} = \frac{2Y_M}{\omega}\cos\alpha$$

Com o objetivo de eliminar tal dependência convencionou-se definir o valor médio de uma grandeza senoidal no intervalo de tempo de $\frac{-\alpha}{\varpi}$ a $\left(\frac{T}{2}-\frac{\alpha}{\varpi}\right)$, resultando:

$$Y_{m,T/2} = \frac{1}{T/2}\int_{-a/\omega}^{\left(\frac{T}{2}-\frac{a}{\varpi}\right)} Y_M sen(\varpi t + a)dt = \frac{2Y_M}{\varpi} \qquad (2.8)$$

Para as grandezas senoidais, o valor eficaz e o fator de forma (*F.F.*) têm os seguintes valores:

$$Y = Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T Y_M^2 sen^2 \omega t dt} = \frac{Y_M}{\sqrt{2}} \qquad (2.9)$$

$$F.F. = \frac{Y}{Y_{mT/2}} = \frac{\frac{Y_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}Y_M} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad (2.10)$$

Dada uma segunda grandeza senoidal:

$$y' = Y'_M \, sen(\varpi t + \beta)$$

diz-se que entre as grandezas *y* e *y’* há uma diferença de fase:

$$\psi = \alpha - \beta$$

que é independente do instante inicial considerado. Em outras palavras, se tomarmos a grandeza *y* com fase inicial nula, a grandeza *y’* terá fase inicial $\psi = \alpha - \beta$.

Fixa-se o sentido anti-horário como o positivo na medida dos ângulos de fase. Deste modo, quando $\psi$ > 0, diz-se que a grandeza *y* está adiantada de ângulo $\psi$ sobre a *y’*: e vice-versa, quando $\psi$ < 0, diz-se que a grandeza *y’* está atrasada de ângulo $\psi$ em relação a *y’*. Finalmente, quando $\psi$ = 0, diz-se que as duas grandezas estão em fase.

### *2.4 Algumas operações com grandezas senoidais*

Dadas duas funções senoidais $y = Y_M sen(\varpi t + \alpha)$ e $y' = Y'_M \; sen(\varpi' t + \alpha')$ temos que:

A) As duas grandezas senoidais são ditas iguais quando, em qualquer instante, seus valores instantâneos forem iguais, isto é quando tiverem mesma freqüência, mesmo valor máximo e mesma fase inicial.

B) A soma de duas grandezas senoidais pode ser calculada, para $\varpi = \omega'$, como:

$$e = Y_M sen(\varpi t + \alpha) + Y'_M \; sen(\varpi' t + \alpha')$$

ou

$$e = (Y_M \cos\alpha + Y'_M \cos\alpha') sen\varpi t + (Y_M sen\alpha + Y'_M \; sen\alpha')\cos\varpi t$$

Fazendo $e = C_M sen(\varpi t + \theta) = (C_M \cos\theta) sen\varpi t + (C_M sen\theta)\cos\varpi t$, resulta:

$$C_M \cos\theta = Y_M \cos\alpha + Y'_M \cos\alpha'$$

$$C_M sen\theta = Y_M sen\alpha + Y'_M \; sen\alpha'$$

ou seja:

$$tg\theta = \frac{Y_M sen\alpha + Y'_M \; sen\alpha'}{Y_M \cos\alpha + Y'_M \cos\alpha'} \qquad (2.11)$$

e

$$C_M = \sqrt{Y_M^2 + Y'^2_M + 2Y_M Y'_M \cos(\alpha - \alpha')} \qquad (2.12)$$

C) O produto das duas grandezas pode ser avaliado por:

$$e = yy' = Y_M Y'_M \; sen(\varpi t + \alpha) sen(\varpi' t + \alpha')$$

lembrando que

$$\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha) = 2 sen\beta sen\alpha$$

e supondo $\varpi = \omega'$, resulta

$$C = \frac{1}{2} Y_M Y'_M \left[ (\cos(\alpha - \alpha') - \cos(2\varpi t + \alpha - \alpha') \right]$$

D) A derivada da Função Senoidal y em relação ao tempo é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \varpi Y_M \cos(\varpi t + \alpha) = \varpi Y_M sen\left(\varpi t + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

isto é, é uma função senoidal de mesma freqüência que a dada, de valor máximo igual ao da função dada, multiplicado por sua pulsação e adiantada de 90° em relação a dada.

---

Exemplo 2.1. - Dadas as grandezas senoidais

$$y = 10sen(377t + \frac{\pi}{6})$$

e

$$y = 20sen(377t + \frac{\pi}{3})$$

determinar as grandezas soma e produto.

Pelas equações 2.11 e 2.12, resulta:

$$C_M = \sqrt{100 + 400 + 400\cos 30} = 29{,}093$$

$$tg\theta = \frac{10sen\frac{\pi}{6} + 20sen\frac{\pi}{3}}{10\cos\frac{\pi}{6} + 20\cos\frac{\pi}{3}} = 1{,}1961$$

$$\theta = 0{,}8745rad = 50{,}1^{o}$$

donde:

$$C = 29{,}093sen(377t + 0{,}8745)$$

Na figura 2.4 está representada a soma gráfica das funções *y* e *y'*.

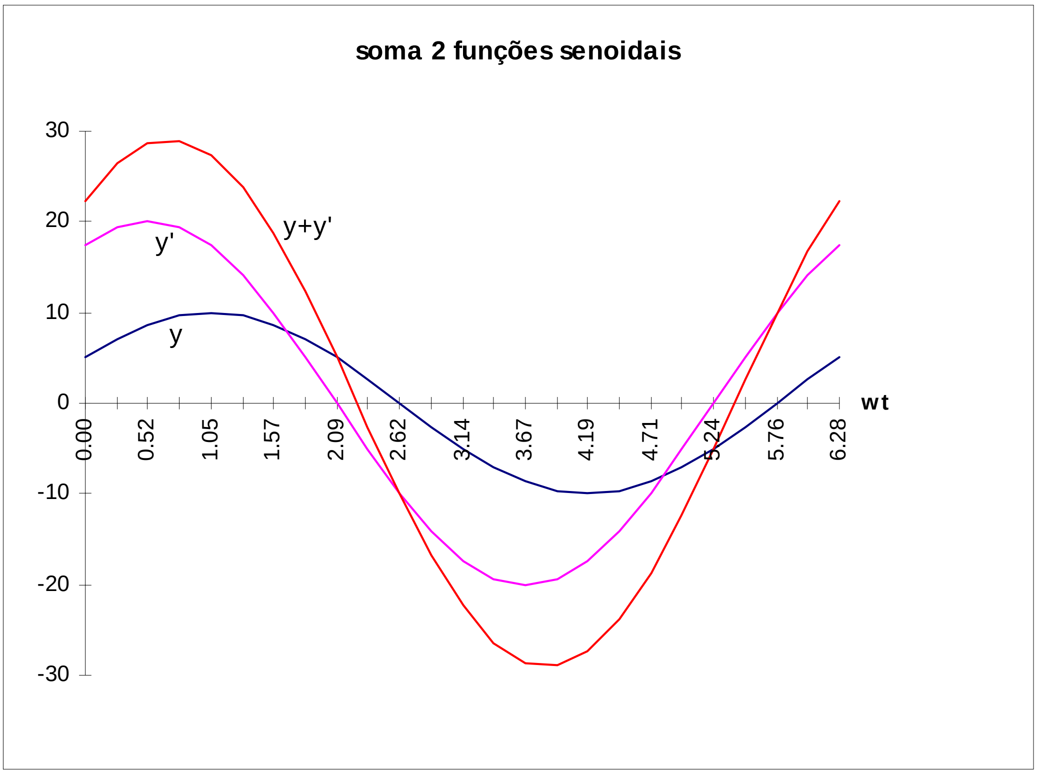



**Figura 2.4 - Soma das funções *y* e *y'* (exemplo 2.1)**

Pela equação 2.13 o produto é dado por:

$$C = 100\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(754t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

isto é

$$C = 86{,}602 - 100\cos\left(754t + \frac{\pi}{2}\right)$$

---

### *2.5 Representação Fasorial das Grandezas Senoidais*

Dos ítens precedentes, verificamos que a execução de operações com grandezas senoidais é muito laboriosa. Lembrando a definição de grandezas senoidais, veremos que é possível representá-las por meio de um vetor girante tornando as operações sobremodo simplificadas. Isto é, uma grandeza senoidal está perfeitamente definida por um vetor *OA* de módulo igual ao valor máximo da função, que gira em torno de seu extremo O com velocidade angular $\omega$ no sentido anti-horário e sua posição no instante *t* = 0 é tal a formar, com a reta origem dos tempos, um ângulo igual à fase inicial da grandeza considerada (figura 2.5). É claro que a projeção do extremo A do vetor sobre uma reta perpendicular à origem dos tempos, descreverá a função senoidal:

$$y = Y_M sen(\varpi t + \alpha)$$

Observamos que o vetor *OA* está representando uma grandeza escalar; portanto, a fim de se evitar confusão designamo-lo por vetor girante.

Suponhamos que sejam dadas duas grandezas senoidais, *y* e *y'* de mesma freqüência, *f*, ângulos iniciais, $\alpha$ e $\beta$, e módulos $Y_M$ e $Y'_M$. Essas duas grandezas podem ser representadas por dois vetores girantes defasados de ângulo $\psi = \alpha - \beta$ e de módulos $Y_M$ e $Y'_M$. Salientamos que ambos giram com mesma velocidade angular; portanto sua posição relativa permanece imutada e a soma das duas, que é representada por um vetor girante, é equivalente à soma de *Y* e *Y'*, cuja obtenção gráfica é imediata (figura 2.6). De fato temos:

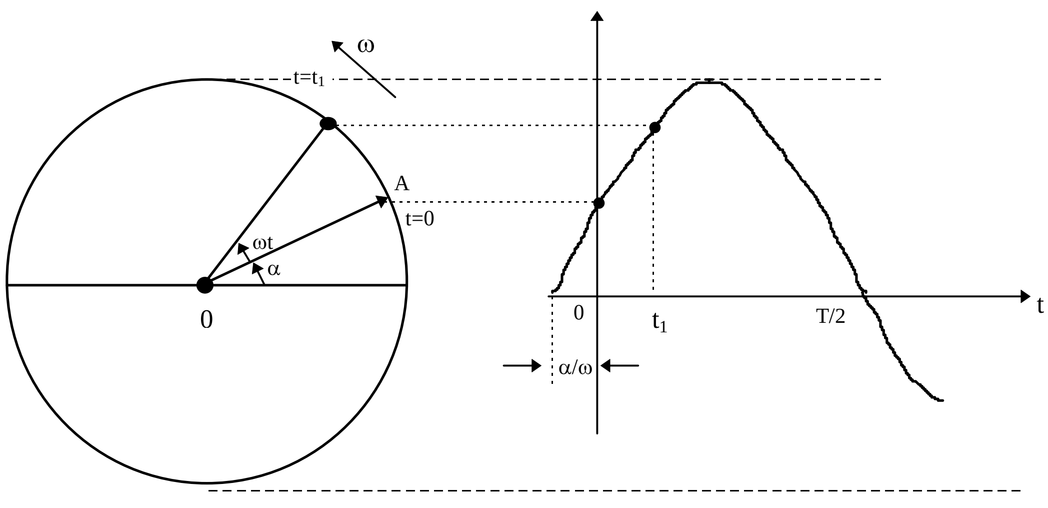



**Figura 2.5 - Representação de uma grandeza senoidal**

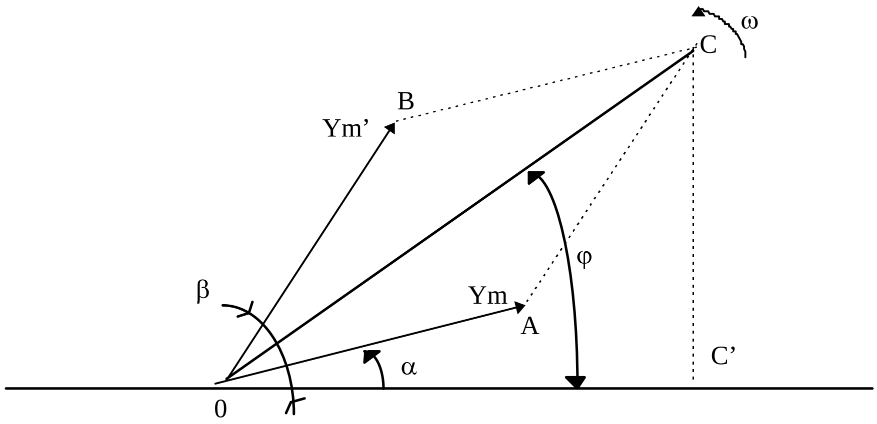



**Figura 2.6 - Representação de duas grandezas senoidais e sua soma por vetores girantes**

$$OC = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{OA}\ .\overline{AC}\ \cos\psi}$$

e

$$tg\psi = \frac{\overline{CC}'}{\overline{OC}'} = \frac{\overline{AC}sen\beta + \overline{OA}sen\alpha}{\overline{AC}\cos\beta + \overline{OA}\cos\alpha}$$

isto é, a projeção do vetor *OC* sobre uma reta perpendicular representa a grandeza soma de *y* com *y'*.

A representação das grandezas senoidais por vetores girantes simplifica enormemente o procedimento de cálculo, porém, apresenta o inconveniente de que se realizam todas as operações graficamente, ou seja com imprecisão gráfica. Assim, com a "representação simbólica" aplica-se aos vetores girantes um procedimento de cálculo sobremodo interessante que permite eliminar as construções gráficas.

Para tanto, fixemos num plano duas direções ortogonais, x e y. Seja $\vec{k}$ um versor unitário na direção do eixo x e de sentido concorde com o sentido positivo desse eixo. É claro que -$\vec{k}$ representa o mesmo versor rodado de $\pi$ radianos. Indicaremos ainda por $j\vec{k}$ o mesmo versor girado de $\pi/2$ radianos no sentido anti-horário. Isto é, a grandeza *j* é um operador que aplicado a um vetor o gira no sentido anti-horário de $\pi/2$ radianos, mantendo-se seu módulo constante. O operador *j* deve satisfazer a condição:

$$j\left(j\vec{k}\right) = j^2\vec{k} = -\vec{k}$$

isto é
$$j^2 = -1$$
$$j = \sqrt{-1}$$

ou seja, o operador *j* representa a unidade imaginária, conforme figura 2.7.

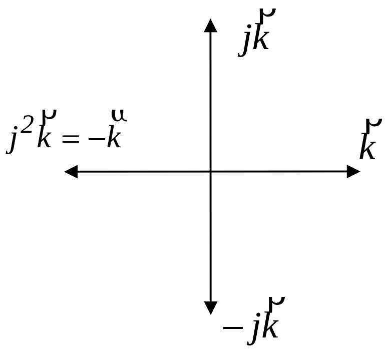



**Figura 2.7 - Aplicação do Operador j**

Um vetor qualquer *OP* ($\vec{I}$), cujas componentes segundo as direções x e y, são *a* e *b* poderá ser representado por:

$$\vec{I} = (a + jb)\vec{k}$$

Omitindo-se o versor $\vec{k}$ o vetor *OP* também estará definido. De fato, seu módulo vale:

$$I = \left|\vec{I}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e o ângulo inicial, $\alpha$, é dado por:

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

Portanto, o vetor está perfeitamente definido. Salientamos que esse vetor está fixo em relação aos eixos <u>e</u> a fim de que represente um vetor girante, deve girar em torno do ponto *0* com velocidade angular $\omega = 2\pi f$ . Para tanto, conforme figura 2.8 ,seja $\alpha$ o ângulo inicial de um vetor girante de módulo $I$ ; num instante <u>*t*</u> qualquer, ele estará deslocado de sua posição inicial de $\omega t$ e será dado por:

$$\vec{I}_{(t)} = I\cos(\omega t + \alpha) + jIsen(\omega t + \alpha)$$

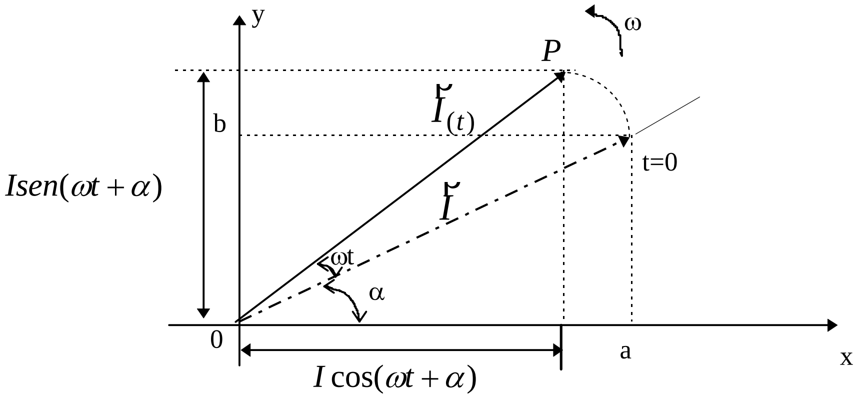



**Figura 2.8 - Representação de Vetor Girante**

isto é

$$\vec{I}_{(t)} = I\left[(\cos\omega t\cos\alpha - sen\omega t sen\alpha) + j(\cos\omega t . sen\alpha + sen\omega t.\cos\alpha)\right]$$

sendo:

$$I\cos\alpha = a \qquad \text{e} \qquad Isen\alpha = b$$

resulta:

$$\vec{I}_{(t)} = (a + jb)\cos\omega t + (ja - b)sen\omega t$$

mas:

$$ja - b = (a + jb)j$$

logo:

$$\vec{I}_{(t)} = (a + jb)(\cos\omega t + jsen\omega t)$$

Lembrando que:

$$\cos\omega t + jsen\omega t = e^{j\omega t}$$

em que $e$ é a base dos logarítmos neperianos, resulta:

$$\vec{I}_{(t)} = (a + jb)e^{j\omega t}$$

O termo $a + jb$ representa o vetor girante no instante *t* = 0, e o termo $e^{j\omega t}$ exprime a rotação do vetor de um ângulo $\omega t$ .

A grandeza vetorial pode então ser determinada a partir do vetor girante pela expressão $y_{(t)} = I_m(\vec{I}_{(t)})$ , onde $I_m$ , é a parte imaginária do vetor girante $\vec{I}$ .

---

Exemplo 2.2 - Dada a grandeza senoidal $i_{(t)} = 100 sen(\omega t + 0{,}5236)$ , determine o vetor girante e o fasor que a representa.

Inicialmente determinaremos o vetor que representa a grandeza no instante *t* = 0, isto é, um vetor cujo módulo vale 100 é cujo ângulo inicial vale 0,5236rad = 30°. Suas componentes valem:

$$a = 100 \cos 30° = 86{,}60$$

$$b = 100 \text{ sen } 30° = 50{,}00$$

donde:

$$a + jb = 86{,}60 + j50{,}00 = \vec{I}_{(o)}$$

e o vetor girante é dado por:

$$\vec{I}_{(t)} = (86{,}60 + j50{,}00)e^{377t}$$

---

Exemplo 2.3 - Dado o vetor girante $\vec{I}$ = (40 + j50) *e* $^{377t}$, determinar:

1) O valor instantâneo da grandeza senoidal para o instante *t* = 1,6 ms.
2) A função senoidal que ele representa.

Tem-se:

$$\vec{I} = (40 + j50)e^{377t}$$

Para o instante t = 1,6.10$^{-3}$ s, resulta:

$$\vec{I} = (40 + j50)(\cos 0{,}377x1{,}6 + sen 0{,}377x1{,}6)$$

ou seja:

$$\vec{I} = (40 + j50)(0{,}8235 + j0{,}5673) = 4{,}575 + j63{,}867$$

donde:

$$i(0{,}0016) = I_m\left[\vec{I}\right] = 63{,}867$$

A grandeza senoidal representada pelo vetor girante é

$$i = I_m\left[\vec{I}\right] = I_m\left[(40 + j50)e^{377t}\right]$$

Passando o número complexo 40+$j$50, para forma polar, obtemos:

$$40 + j50 = 64{,}031e^{j0{,}896}$$

donde:

$$\vec{I}_{(t)} = 64{,}031e^{j0{,}896}e^{377t} = 64{,}031e^{j(377t+0{,}896)}$$

ou

$$\vec{I}_{(t)} = 64{,}031\left[\cos(377t + 0{,}896) + jsen(377t + 0{,}896)\right]$$

donde:

$$i = I_m\left[\vec{I}_{(t)}\right] = 64{,}031sen(377t + 0{,}896)$$

---

Em qualquer instante que se considere todos os vetores girantes estão em posição imútavel entre si, isto é, estão todos com sua posição inicial acrescida de ângulo $\omega t$. Ora, nessas condições, é óbvio pensar em se eliminar o termo $e^{j\omega t}$, adotando-se um valor inicial arbitrário para *t*. Em particular, considerando que o valor inicial pode ser qualquer, adota-se usualmente *t* = 0. Além disso, como todas as grandezas elétricas são expressas em termos de valores eficazes, optou-se por substituir o “vetor girante” pelo "fasor" substituindo o valor máximo pelo eficaz. Assim, para se passar do fasor para a grandeza senoidal deve-se multiplicar seu valor máximo, que é o valor eficaz da grandeza, por $\sqrt{2}$ e imprimir-lhe rotação, por meio de $e^{j\omega t}$, para finalmente tomar sua parte imaginária. Assim, para o Exemplo 2.3, o fasor da grandeza senoidal vale:

$$\dot{I} = \frac{40 + j50}{\sqrt{2}} = 42{,}58e^{j0{,}896}$$

Sejam *y* e *y'* duas grandezas senoidais de mesma freqüência, *f*, de módulos $Y_M$ e $Y'_M$ e de ângulos iniciais $\alpha$ e $\beta$ e das quais desejamos obter a soma. Teremos os seguintes vetores girantes:

$$\vec{Y}_{(t)} = (a + bj).e^{j\omega t}$$

$$\vec{Y}'_{(t)} = (a' + b'j).e^{j\omega t}$$

em que:

$$a = Y_M \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad a' = Y'_M \cos\beta$$

A soma das duas funções é representada pelo vetor girante $\vec{C}$ obtida por:

$$\vec{C} = \vec{Y} + \vec{Y}' = (a + bj).e^{j\omega t} + (a' + b'j).e^{j\omega t}$$

ou

$$\vec{C} = \left[(a + a') + j(b + b')\right]e^{j\omega t}$$

e o fasor $\dot{C}$ correspondente vale:

$$\dot{C} = (a + a') + j(b + b')$$

A derivada do vetor $\vec{Y}$ é dada por:

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left|(a + bj).e^{j\omega t}\right| = j\omega(a + bj).e^{j\omega t}$$

isto é, o fasor derivada tem módulo $\omega$ vezes maior e está adiantado de $\pi/2$ radianos e é igual a $j\omega\,(a + jb)$ ou $(-\omega b + j\omega a)$.

---

Exemplo 2.4 - Dadas as grandezas senoidais $y$ = 100 *sen*(377$t$ + 0,6981) e $y'$ = 200 *sen*(377$t$ + 0,6109), pede-se determinar a grandeza soma.

Os vetores girantes serão dados por:

$$\vec{Y} = 100(\cos 0{,}6981 + j sen 0{,}6981)e^{j377t}$$

$$\vec{Y}' = 200(\cos 0{,}6109 + j sen 0{,}6109)e^{j377t}$$

donde os fasores:

$$\dot{Y} = \frac{100}{\sqrt{2}}(\cos 0{,}6981 + j sen 0{,}6981)e^{j377.0} = 54{,}1690 + j45{,}4502$$

$$\dot{Y}' = \frac{200}{\sqrt{2}}(\cos 0{,}6109 + j sen 0{,}6109)e^{j377.0} = 115{,}8428 + j81{,}1200$$

Finalmente tem-se

$$\dot{C} = \dot{Y} + \dot{Y}' = 170{,}0118 + j126{,}5702 = 211{,}9529e^{j0{,}64}$$

o vetor girante correspondente será:

$$\vec{C} = 211{,}9529\sqrt{2}e^{j0{,}64}e^{377t} = 299{,}7467e^{j(377t+0{,}64)}$$

donde:

$$C = I_m\left|\vec{C}\right| = 299{,}7467 sen(377t + 0{,}64)$$

---

### 2.6 Números Complexos

A seguir serão lembradas algumas propriedades dos números complexos que serão úteis nas operações com o método simbólico. Assim, dizemos que um número complexo está na forma binominal quando é representado pelo binômio $a + jb$. Pode-se representá-lo na forma polar por $\rho(\cos\alpha + jsen\alpha) = a + jb$ bastando, para tanto, que na expressão exista a igualdade entre as partes reais e imaginárias, isto é:

$$\rho\cos\alpha = a$$
$$\rho sen\alpha = b$$

donde:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{e} \qquad \alpha = arctg\frac{b}{a}$$

Dizemos que dois números complexos na forma binominal são iguais quando existir a igualdade entre suas partes reais e suas partes imaginárias. Evidentemente, quando na forma polar, teremos a igualdade, entre si, dos módulos e fases.

Soma-se ou subtrai-se números complexos facilmente, desde que estejam na forma binominal, pois é suficiente somar (subtrair) entre si as partes reais e as imaginárias, isto é:

$$a_1 + jb_1 \pm (a_2 + jb_2) = a + jb$$

em que:

$$a = a_1 \pm a_2$$
$$b = b_1 \pm b_2$$

Por outro lado, o produto e o quociente entre números complexos é facilmente realizado quando estes estiverem na forma polar, pois é suficiente multiplicar (dividir) os módulos e somar (subtrair) os argumentos, isto é:

$$\rho_1(\cos\alpha_1 + jsen\alpha_1).\rho_2(\cos\alpha_2 + jsen\alpha_2) =$$

$$\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - sen\alpha_1 en\alpha_2) +$$

$$j\rho_1\rho_2(sen\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 sen\alpha_2) =$$

$$\rho_1\rho_2\left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + jsen(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$$

Ou seja, o produto é $\rho(\cos\alpha + jsen\alpha)$, onde $\rho = \rho_1\rho_2$ e $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Além disso, seja:

$$\frac{\rho_1\left(\cos\alpha_1 + jsen\alpha_1\right)}{\rho_2\left(\cos\alpha_2 + jsen\alpha_2\right)} = \rho(\cos\alpha + jsen\alpha)$$

será

$$\rho_1(\cos\alpha_1 + jsen\alpha_1) = \rho\rho_2\left|\cos(\alpha_2 + \alpha) + jsen(\alpha_2 + \alpha)\right|$$

e pela definição de igualdade de números complexos, devemos ter:

$$\rho_1 = \rho\rho_2 \qquad \text{e} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha$$

donde:

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

É usual representar-se um número complexo na forma polar dando-se seu módulo e seu argumento, isto é:

$$\rho(\cos\alpha + jsen\alpha) = \rho\underline{/\ \alpha}$$

---

Exemplo 2.5 - Dados os números complexos:

$$10\underline{/\ 30^o} \quad \text{e} \quad 20\underline{/\ -45^o}$$

pede-se sua soma e sua diferença.

Tem-se:

$$\dot{C}_1 = 10\underline{/\,30^o} \;=\; 10(\cos 30 \;+\; jsen30) = 8{,}660 \;+\; j5{,}000$$

$$\dot{C}_2 = 20\underline{/\,-45^o} \;=\; 20(\cos 45 \;+\; jsen45) = \; 14{,}142 - j14{,}142$$

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = 22{,}802 - j9{,}142 = 24{,}566\underline{/\,-21{,}85^o}$$

$$\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = 5{,}482 + j19{,}142 = 19{,}912\underline{/\,105{,}98^o}$$

---

Exemplo 2.6 - Dados os números complexos (3 + *j* 4) e (-7 + *j*12), pede-se seu produto e seu quociente.

Tem-se:

$$\dot{C}_1 = 3 + 4j = 5\underline{/\,53{,}13^o}$$

$$\dot{C}_2 = -7 + 12j = 13{,}89\underline{/\,120{,}26^o}$$

$$\dot{C} = \dot{C}_1 . \dot{C}_2 = 69{,}45\underline{/\,173{,}39^o}$$

$$\dot{C}' = \dot{C}_1 / \dot{C}_2 = 0{,}36\underline{/\,-67{,}13^o}$$

E na forma retangular, temos:

$$C_r = C\cos\alpha = 69{,}45.\cos 173{,}39 = -68{,}988$$
$$C_i = Csen\alpha = 69{,}45.sen173{,}39 = 7{,}994$$
$$C'_r = C'\cos\alpha' = 0{,}36.\cos 67{,}13 = 0{,}140$$
$$C_i = C'sen\alpha' = -0{,}36.\cos 67{,}13 = -0{,}332$$

isto é

$$C = -68{,}988 + j7{,}994$$
$$C' = 0{,}140 - j0{,}332$$

---

## 3. GERAÇÃO DE F.E.M. SENOIDAL

Suponhamos ter uma bobina que gira em torno de seu eixo, com velocidade angular $\omega$, imersa num campo magnético, de indução *B*, conforme figura 3.1. O fluxo concatenado com a bobina é dado por:

$$\varnothing = NBS\cos\omega t$$

em que:
$N$ = número de espiras da bobina
$S$ = Área da superfície limitada pela bobina

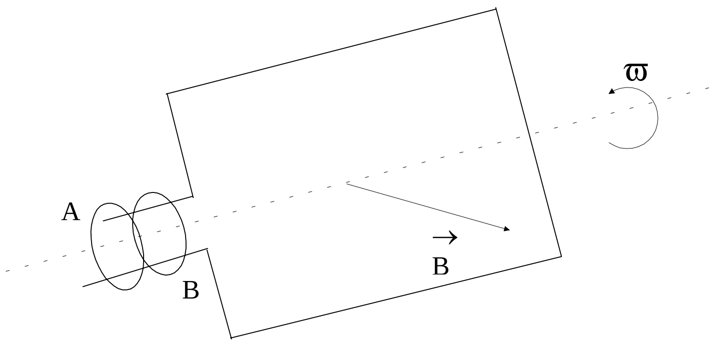



**Figura 3.1 - Geração de f.e.m. Senoidal**

Devido à variação do fluxo concatenado com a bobina, ela será sede de uma f.e.m. induzida dada, por:

$$e = -\frac{d\varnothing}{dt} = -NBS\frac{d}{dt}\cos\omega t$$

isto é

$$e = NBS\omega sen\omega t = E_M sen\omega t$$

onde

$$E_M = NBS\omega$$

Portanto, entre os terminais A e B da bobina existe f.e.m. induzida que varia no tempo com lei senoidal.

Ligando-se externamente aos terminais da bobina uma resistência, verificar-se-á a circulação de uma corrente que irá dissipar determinada energia. Essa é a energia mecânica fornecida à bobina e transformada em energia elétrica.

## 4. POTÊNCIA EM CIRCUITOS COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

Suponhamos ter um gerador, cuja tensão em seus terminais varia com lei senoidal, alimentando carga tal que a corrente fornecida varie senoidalmente e esteja atrasada de ângulo $\psi$ em relação à tensão. Isto é, sejam (figura 4.1):

$$v = V_M sen(\omega t + \theta_1)$$

$$i = I_M sen(\omega t - \psi + \theta_1)$$

a tensão e a corrente nos terminais do gerador.

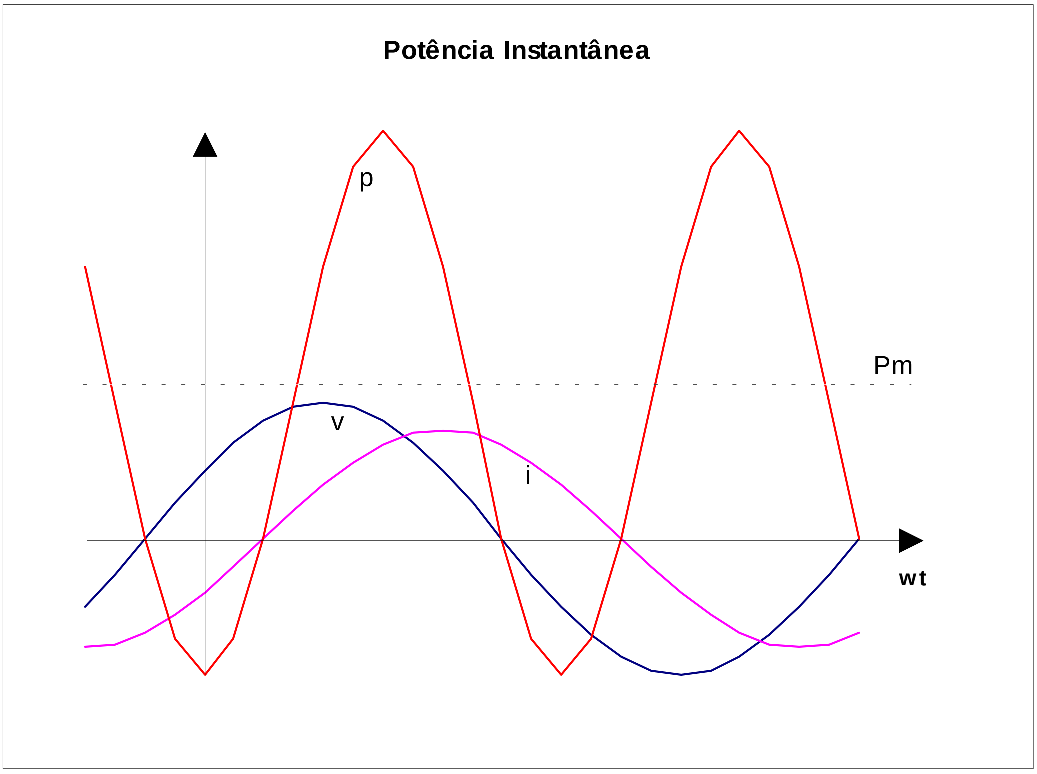



**Figura 4.1 - Variação da Potência em Função do Tempo**

É claro que, em cada instante, a potência fornecida pelo gerador é dada pelo produto dos valores instantâneos da tensão e corrente, isto é:

$$p = vi = V_M I_M sen(\omega t + \theta).sen(\omega t - \psi + \theta_1)$$

em que $p$ representa o valor instantâneo da potência fornecida pelo gerador. Lembrando que:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 sen\alpha sen\beta$$

resulta

$$p = \frac{V_M I_M}{2}\left[\cos\psi - \cos(2\omega t - \psi + 2\theta_1)\right]$$

ou ainda, sendo $V_M = \sqrt{2}V$ e $I_M = \sqrt{2}\,I$ , resulta:

$$p = VI\cos\psi + VIsen(2\omega t - \psi - \frac{\pi}{2} + 2\theta_1) \qquad (4.1)$$

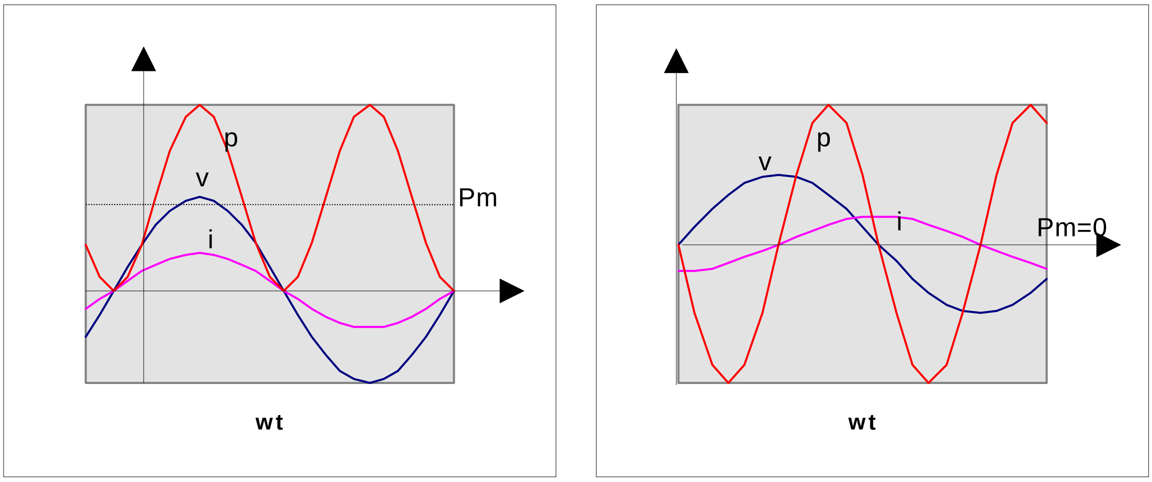
Verifica-se, assim, que a potência instantânea é composta por duas parcelas: uma constante ($VI\cos\psi$) que representa a potência fornecida à carga e outra variável senoidalmente com freqüência dupla da tensão aplicada, que representa à energia que ora é fornecida pelo gerador e ora é devolvida. Esta última parcela recebe a designação de potência flutuante.

O valor médio da potência num ciclo é dado por:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = VI\cos\psi \qquad (4.2)$$

e recebe o nome de “potência ativa” ou mais simplesmente “potência”. Ao coseno do ângulo de rotação de fase, $\cos\psi$ , dá-se o nome de “fator de potência”.

Observamos que para fator de potência unitário ($\psi = 0$), a potência ativa será expressa pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente. Para fator de potência nulo ($\psi = \pi/2$) a potência ativa será nula, conforme ilustrado na figura 4.2.




a) Carga - fator de potência unitário ($\psi$=0) b) Carga - fator de potência nulo ($\psi$=$\pi$/2)

**Figura 4.2 - Variação da potência com o tempo**

Definem-se ainda as grandezas potência aparente, potência reativa e potência complexa, que são apresentadas abaixo.

A potência aparente, $S$, é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente, isto é:

$$S = V.\ I \tag{4.3}$$

sendo medida em Volt-Ampére (VA).

A potência reativa, $Q$, é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente pelo seno do ângulo de rotação de fase entre ambas, isto é:

$$Q = V.I.sen\psi \tag{4.4}$$

sendo medida em Volt-Ampére-reativo (VAR).

Das expressões (4.2) e (4.4), resulta:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

A potência complexa, $\bar{S}$, é expressa por um número complexo cuja parte real é a potência ativa e cuja parte imaginária é a potência reativa, isto é:

$$\bar{S} = P + jQ = VI\cos\psi + jVIsen\psi = VI\,\underline{/\,\psi} = S\,\underline{/\,\psi} \qquad (4.5)$$

Observando-se que a tensão e a corrente consideradas são expressas pelos fasores;

$$\dot{V} = V\,\underline{/\,\theta_1}$$

$$\dot{I} = I\,\underline{/\,\theta_1 - \psi}$$

notamos que a potência complexa é dado pelo produto:

$$\dot{V}\,\dot{I}^*$$

em que $\dot{I}^*$ é o complexo conjugado da corrente, isto é:

$$\bar{S} = \dot{V}\,\dot{I}^* = V\,\underline{/\,\theta_1}\quad I\,\underline{/-\theta_1 + \psi} = VI\,\underline{/\,\psi}$$

Convencionou-se adotar como positiva a potência reativa fornecida a uma carga na qual a corrente está atrasada em relação à tensão. Decorre que uma carga na qual a corrente está adiantada em relação à tensão ($\psi$ negativo) a potência reativa será negativa.

# 5. CIRCUITOS ELEMENTARES COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

## *5.1 Resistência Pura*

Suponhamos aplicar a uma resistência, *R*, constante, uma tensão alternada senoidal de valor máximo $V_M$ e freqüência *f*. É óbvio que em cada instante deverá ser satisfeita a lei de Ohm, isto é:

$$v_{(t)} = R i_{(t)}$$

ou seja:

$$i_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{R} = \frac{V_M}{R} sen\omega t$$

verificando-se que a corrente que percorre a resistência está em fase com a tensão de alimentação e que seu valor máximo está relacionado com o da tensão pelo valor da resistência.

Na notação simbólica tem-se, empregando valores eficazes, e supondo a tensão com fase nula:

$$\dot{V} = V\underline{/0}$$

Logo:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{V}{R}\underline{/0} = I\underline{/0}$$

A figura 5.1 mostra um circuito resistivo e o correspondente diagrama com os fasores de tensão e corrente.

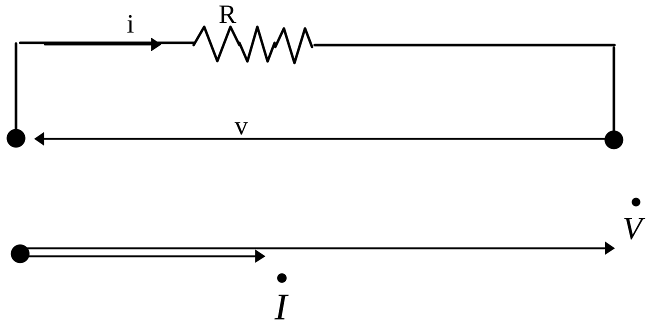



**Figura 5.1 - Circuito Resistivo e seu Diagrama Fasorial**

A potência instantânea absorvida pela resistência é dada por:

$$p_{(t)} = i^2 R = v_{(t)} i_{(t)} = \frac{v_{(t)}^2}{R}$$

A potência ativa ou real é dada por:

$$P = VI = RI^2 = V^2 / R$$

O fator de potência ($\cos\psi$) é unitário, a potência reativa (*Q*) é nula e a potência aparente coincide com a ativa.

Verifica-se, pois, que todas as relações entre valores eficazes coincidem com os valores que seriam obtidos alimentando-se a resistência *R* com tensão contínua de valor V. A expressão da lei de Joule nos permite, portanto, interpretar o valor eficaz de uma corrente como sendo:

*"O valor eficaz de uma corrente alternada é igual ao valor de uma corrente contínua que atravessando a mesma resistência produz igual quantidade de calor no mesmo intervalo de tempo".*

Salienta-se que esta conclusão obtida para grandezas senoidais é válida para grandezas alternativas quaisquer.

---

Exemplo 5.1 - Aplica-se a uma resistência de 20Ω tensão senoidal de valor eficaz 100V e freqüência de 60 Hz. Pede-se:

a) O valor eficaz da intensidade de corrente na resistência.
b) A potência dissipada na resistência.
c) O valor instantâneo da corrente e da tensão.

Adotando-se a tensão com fase inicial nula resulta:

$$\dot{V} = V\underline{/\,0} = V + 0j = 100\underline{/\,0} = 100 + 0j$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{100}{50} = 5 + 0j$$

donde:

$$I = |\dot{I}| = 5A$$

A potência dissipada na resistência vale

$$P = RI^2 = 20.5^2 = 500W.$$

O valor instantâneo da corrente é dado por:

$$i = I_M sen \varpi t$$

em que:

$$\varpi = 2\pi f = 2\pi.60 \cong 377rd/seg$$

$$V_M = \sqrt{2}\ V = \sqrt{2}.100 = 141{,}42V$$

$$I_M = \sqrt{2}\ I = \sqrt{2}.5 = 7{,}071A$$

logo:

$$i = 7{,}071 sen 377t$$
$$v = 141{,}42 sen 377t$$

---

### *5.2 Indutância Pura*

Aplicando-se uma tensão senoidal de freqüência $f$ e de valor eficaz *V* a uma bobina de indutância *L* e resistência ôhmica nula ter-se-á a circulação, pela indutância, de uma corrente de valor instantâneo $i$ que irá criar uma f.e.m. dada por:

$$e_{(t)} = -L \frac{di_{(t)}}{dt}$$

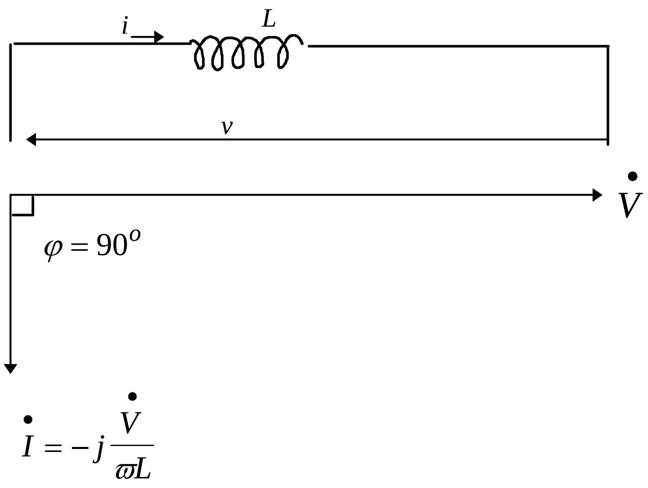



**Figura 5.2 - Circuito Indutivo com Excitação Senoidal**

Por outro lado, devemos ter:

$$v_{(t)} + e_{(t)} = 0\,,$$

isto é:

$$v_{(t)} = -e_{(t)} = L\frac{di_{(t)}}{dt}\,.$$

Sendo:

$$v_{(t)} = V_M sen\omega t\,,$$

resulta, imediatamente:

$$i_{(t)} = \frac{V_M}{\omega L} sen(\omega t - \pi / 2) \qquad (5.1)$$

A Eq. (5.1) mostra que a corrente numa indutância está atrasada de $\pi/2$ radianos em relação à tensão aplicada e seu valor máximo é obtido dividindo-se o valor máximo da tensão por $\omega L$ que é designado por “reatância indutiva”, sendo representada por $X_L$ e com a dimensão de uma resistência (H . rd/seg = Ohm . seg . rd/seg = Ohms).

No método simbólico, leva-se em conta a rotação de fase da corrente representando-se a indutância por uma “impedância” que é dada por um número complexo no qual a parte imaginária é a reatância da bobina. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = -j\frac{\dot{V}}{X_L} \qquad (5.2)$$

sendo:

$$\dot{V} = V\underline{/0}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_L}\underline{/-\pi/2}$$

Assim, numa indutância, a tensão e a corrente estão em quadratura e o fator de potência correspondente é dado por:

$$\cos\varphi = \cos\pi/2 = 0$$

A potência ativa é nula e a reativa que coincide com a aparente, é positiva e vale:

$$Q = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = S$$

Notamos que a indutância, quando ligada a uma fonte de corrente alternada, é percorrida por uma corrente sem que haja uma dissipação de energia. A presente situação é a que foi ilustrada na fig. 4.2b na qual se observa que durante o intervalo de tempo que vai desde *T*/4 até *T*/2, a fonte de tensão fornece à indutância energia, cujo valor médio, nesse intervalo, é dado por $2VI/\pi$ . No intervalo de tempo *T*/2 a 3*T*/2, a indutância absorve a mesma quantidade de energia porém com o sinal negativo, isto é, devolve a energia recebida. O princípio de funcionamento pode ser facilmente entendido lembrando-se que, numa indutância percorrida por corrente *i*, tem-se armazenamento, no campo magnético, de uma quantidade de energia dada por:

$$W = \frac{1}{2}Li^2$$

e sendo a corrente variável periodicamente de 0 a $+I_M$, a energia fornecida à indutância variará de 0 a $LI_M^2/2$ sendo que durante ¼ de ciclo, essa energia é armazenada no campo magnético e durante o quarto seguinte, é devolvida.

Verificamos que a diferença básica entre uma indutância e uma resistência está em que a resistência transforma toda a energia que recebe em calor, ao passo que a indutância ora a armazena no campo magnético, ora a devolve ao sistema.

---

Exemplo 5.2 - Uma indutância de 0,08 H é alimentada com tensão senoidal de valor eficaz 240 V e 60 Hz. Pede-se:

a) A intensidade de corrente na indutância.
b) A potência ativa, aparente e reativa fornecidas à indutância.
c) O valor instantâneo da corrente e tensão.

Resolução:

a) Determinação da corrente

Temos:

$$\dot{V} = (240 + j0)V \qquad \text{e} \qquad X_L = 2\pi f L = 30{,}16\Omega$$

logo:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = \frac{240 + 0j}{j30{,}16} = -j7.96 = 7.96\underline{/-\pi/2} \quad \text{A}$$

$$I = |\dot{I}| = 7{,}96A$$

b) Determinação da potência

Temos:

$$P = VI\cos\psi = 240x7{,}96x0 = 0W$$
$$S = VI = 240x7{,}96 = 1910{,}4VA$$
$$Q = VIsen\psi = 240x7{,}96x1 = 1910{,}4VAr$$

c) Valores instantâneos

Temos:

$$V_M = \sqrt{2}\ V = \sqrt{2}.240 = 339{,}41V$$

$$I_M = \sqrt{2}\ I = \sqrt{2}.7{,}96 = 11{,}26A$$

logo:

$$v = 339{,}4 sen 337t \qquad \text{(V)}$$

$$i = 11{,}26 sen\left(337t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(A)}$$

---

### *5.3 Capacidade Pura*

Um capacitor de capacidade *C*, alimentado por uma tensão senoidal de valor eficaz *V* e freqüência *f*, em regime terá a carga *q*, dada por:

$$q_{(t)} = Cv_{(t)} = CV_M sen\omega t$$

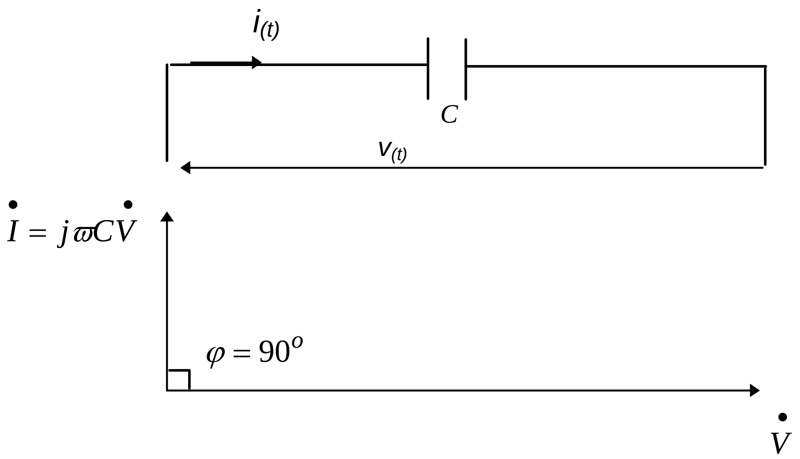



**Figura 5.3 - Circuito Capacitivo com Excitação Senoidal**

Portanto, será percorrido por corrente (por indução eletrostática) dada por:

$$i_{(t)} = \frac{dq_{(t)}}{dt} = C\frac{dv_{(t)}}{dt} = \omega CV_M sen(\omega t + \pi / 2)$$

Verificamos que a corrente num capacitor está adiantada de $\pi/2$ radianos em relação à tensão e seu valor eficaz é obtido multiplicando-se o valor correspondente da tensão por $\omega C$. Analogamente, a quanto feito com uma indutância, o termo:

$$X_C = \frac{1}{\varpi C}$$

é chamado de "reatância" do capacitor ou de reatância capacitiva. A unidade da reatância capacitiva também é "Ohm".

Na notação simbólica, a "impedância" de um capacitor será representada por um número complexo no qual a parte real será nula e a parte imaginária será $-jX_C$. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{-jX_C} = j\frac{\dot{V}}{X_C}$$

sendo:

$$\dot{V} = V\underline{/0}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_C}\underline{/\pi/2}$$

Assim, o fator de potência de um capacitor é dado por:

$$\cos\psi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

A potência ativa absorvida é nula enquanto que a aparente e a reativa coincidem em módulo e valem:

$$S = VI$$

$$Q = VIsen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -VI = -\frac{I^2}{\varpi C} = -\varpi CV^2$$

As considerações energéticas feitas com relação a uma indutância aplicam-se aos capacitores, lembrando unicamente que, neste caso, a energia é armazenada no capacitor sob a forma de energia eletrostática e vale:

$$W = \frac{1}{2}Cv^2$$

Frisamos ainda que, num capacitor, não existe circulação de corrente pelo dielétrico, isto é, há uma circulação de corrente por indução eletrostática de carga entre as placas.

---

Exemplo 5.3 - Determinar a intensidade de corrente num circuito formado por um capacitor de 10µF ligado a uma fonte de 120 V e 60 Hz.

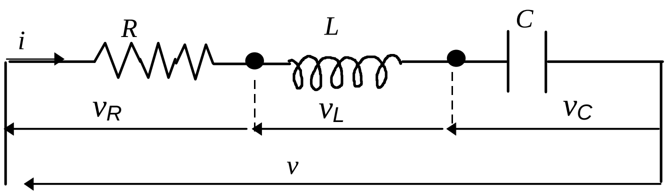
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi.60.10.10^{-6}} = 265{,}26\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{120}{-jX_C} = \frac{120}{265{,}26} j = j0{,}452\,A$$

---

### *5.4 Circuito com Elementos em Série*

Dado o circuito da fig. 5.4, constituído pela associação em série de uma indutância, uma capacidade e uma resistência, alimentado por uma tensão senoidal de valor eficaz V e freqüência f deseja-se calcular a corrente e as quedas de tensão nos três elementos.



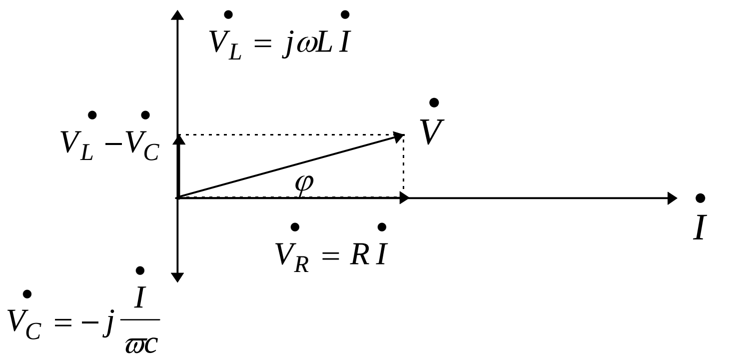




**Figura 5.4 - Associação RLC série**

Notamos que, estando os elementos em série, a corrente que circula, evidentemente, será a mesma para os três, portanto, poderemos adotar:

$$\dot{I} = I\underline{/0} = I(1+0j)$$

De quanto visto nos itens anteriores, a queda de tensão em cada um dos elementos será dada por:

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = IR\underline{/0}$$
$$\dot{V}_L = \dot{I}(jX_L) = IX_L\underline{/\pi/2}$$
$$\dot{V}_C = \dot{I}(-jX_C) = IX_C\underline{/-\pi/2}$$

É claro que, em cada instante, a tensão aplicada deverá igualar a soma das quedas de tensão. Portanto, essa relação deve também valer para os fasores correspondentes:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{I}\left[R + j(X_L - X_C)\right] \tag{5.6}$$

Definimos "operador impedância" ao número complexo que, multiplicado pelo fasor da corrente no ramo do circuito, nos dá o fasor da tensão aplicada ao mesmo. A impedância do circuito, $\overline{Z}$, ora analisado, é:

$$\overline{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C)$$

Em particular, para os elementos individuais, isto é, uma resistência, uma indutância e uma capacidade, a impedância é dada por:

$$\dot{Z}_R = R + 0j = R\underline{/0}$$
$$\dot{Z}_L = 0 + jX_L = X_L\underline{/\pi/2}$$
$$\dot{Z}_C = 0 - jX_C = X_C\underline{/-\pi/2}$$

Passando a impedância $\overline{Z}$ para a forma trigonométrica (módulo Z e fase θ), teremos:

$$\overline{Z} = Z(\cos\theta + jsen\theta) = Z\underline{/\,\theta} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V\underline{/\,0}}{I\underline{/-\varphi}} = VI\underline{/\,\varphi}$$

Notamos que o ângulo de defasagem entre tensão e corrente, $\varphi$, em tela, coincide com o argumento da impedância, e o fator de potência pode ser avaliado por:

$$\cos\psi = \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z} \tag{5.7}$$

Para a construção do diagrama de fasores, figura 5.5, supõe-se conhecida a intensidade de corrente; portanto, conforme já vimos, a queda de tensão na resistência será representada por um fasor em fase com a corrente e de módulo igual a $IR$. Na indutância, o será por um fasor em quadratura e adiantado sobre a corrente e de módulo $IX_L = 2\pi fLI$ . Finalmente, no capacitor, a queda de tensão será dada por um fasor em quadratura e atrasado sobre a corrente e de módulo $IX_C = I/(2\pi f\, C)$. A tensão aplicada será obtida somando-se vetorialmente os três fasores. Como $\dot{V}_L$ e $\dot{V}_C$ estão em posição de fase, sua soma equivalerá à soma algébrica de seus módulos, isto é:

$$\dot{V}_L - \dot{V}_C = \dot{I}\left(X_L - X_C\right)j$$

Para a determinação gráfica de todas as incógnitas, observamos que os fasores $\dot{V}$, $\dot{V}_R$, e $(\dot{V}_L$ - $\dot{V}_C)$ formam um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é representada pelo fasor $\dot{V}$ .

Quanto à potência ativa, observamos que:

$$P = VI\cos\varphi = (IZ).I.\frac{R}{Z} = I^2 R \tag{5.8}$$

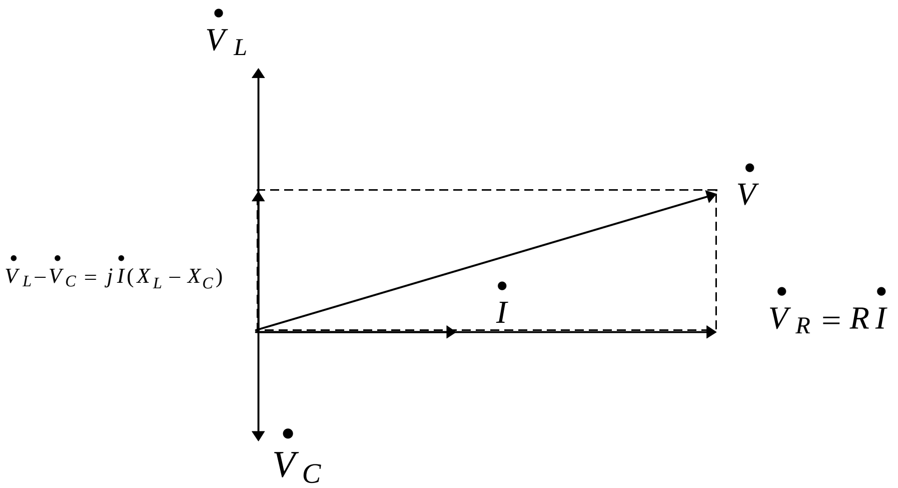



**Figura 5.5 - Diagrama de Fasores para Circuito R-L-C Série**

Exemplo 5.4 - Resolver o circuito da figura 5.6

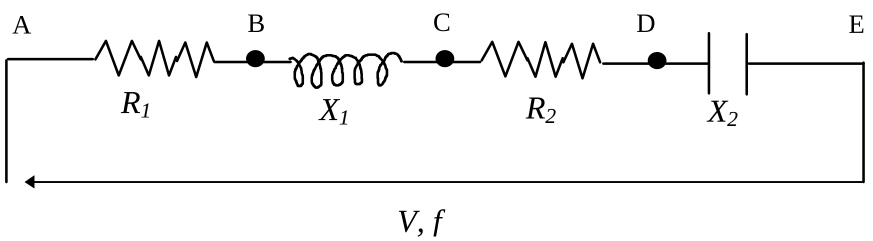



**Figura 5.6 - Circuito para exemplo 5.4**

em que:

$$V = 220V \quad (eficaz)$$
$$R_1 = 4\Omega \qquad R_2 = 8\Omega$$
$$f = 60Hz$$
$$L = 13{,}26mH \qquad C = 294{,}7\mu F$$

a) Cálculo da impedância

Sendo $Z = Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CD} + Z_{DE}$ , resulta:

$$Z_{AB} = (4 + 0j)\Omega \qquad Z_{CD} = (8 + 0j)\Omega$$

$$Z_{BC} = 2\pi 60.0{,}013226 = J5\Omega \qquad Z_{DE} = -j\frac{1}{2\pi.294{,}7.10^{-2}} = -j9\Omega$$

$$Z = 12 - j4\ \Omega$$

b) Cálculo da corrente

Adotando-se $\dot{V} = 220 + 0j$ , resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{220}{12 - j4} = \frac{220}{12{,}65\underline{/-18{,}43^o}} = 17{,}39\underline{/18{,}43^o}\,A = (16{,}5 + j5{,}5)\,A$$

c) Cálculo das tensões

$$\dot{V}_{AB} = Z_{AB}\,\dot{I} = 4.(16{,}5 + j5{,}5) = 66 + j22 = 69{,}57\underline{/18{,}43^o}V$$

$$\dot{V}_{BC} = Z_{BC}\,\dot{I} = 5j.(16{,}5 + j5{,}5) = 82{,}5j - 27{,}5 = 86{,}96\underline{/108{,}43^o}V$$

$$\dot{V}_{CD} = Z_{CD}\,\dot{I} = 8.(16{,}5 + j5{,}5) = 132 + j44 = 139{,}14\underline{/18{,}43^o}V$$

$$\dot{V}_{DE} = Z_{DE}\,\dot{I} = -9j.(16{,}5 + j5{,}5) = -148.5j + 49{,}5 = 156{,}53\underline{/-71{,}56^o}V$$

Verificação:

$$\dot{V}_{AE} = \dot{V}_{AB} + \dot{V}_{BC} + \dot{V}_{CD} + \dot{V}_{DE} = (220 + j0)V$$

O resultado é ilustrado no diagrama de fasores da figura 5.7.

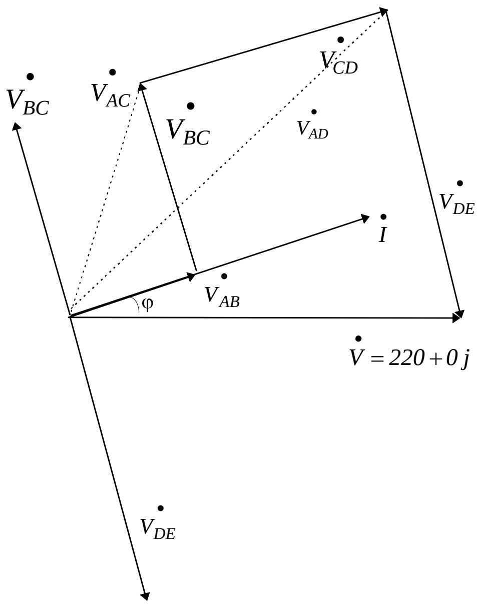



**Figura 5.7 - Diagrama de Fasores**

# 6. RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA

### 6.1 Princípios Gerais

De tudo quanto exposto, resulta evidente que a lei de Ohm é válida desde que se empregue a notação simbólica e se substitua a resistência pela impedância, isto é, a lei de Ohm deverá ser posta na forma:

$$\dot{V} = \dot{I}\,\overline{Z}$$

que evidentemente poderá ser generalizada para um circuito contendo impedâncias, e f.e.m., $E_i$, em série, sob a forma:

$$\dot{V} = \sum \dot{E}_i - \dot{I} \sum \overline{Z_i}$$

Analogamente, as leis de Kirchhoff são expressas por:

Lei de nós: $\sum \dot{I}_i = 0$

Lei das malhas: $\sum \dot{E}_i = \sum \dot{I}_i \overline{Z}_i$

Salientamos que, desde que se opere com os fasores de tensões e corrrentes e com as impedâncias, são válidas todas as proposições aplicáveis para corrente contínua (método das correntes fictícias de Maxwell, gerador equivalente de Thevenin, princípio de superposição de efeitos, transformação estrela-triângulo, etc).

Define-se admitância ao operador $\overline{Y}$, que representa o inverso da impedância, isto é:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}}.$$

Sendo:

$$\overline{Z} = R + jX$$

resulta:

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} \quad (5.9)$$

Da Eq.(5.9) define-se “condutância” e “susceptância” como sendo, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da admitância, isto é:

$$G = \frac{R}{Z^2} \qquad\qquad B = -\frac{X}{Z^2}$$

Representando-se a impedância e a admitância na forma trigonométrica:

$$\overline{Z} = Z\underline{/\ \varphi} \qquad\qquad \overline{Y} = Y\underline{/\ \theta}$$

resulta:

$$\overline{Y} = Y\underline{/\ \theta} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{Z\underline{/\ \varphi}} = \frac{1}{Z}\underline{/\ -\varphi}$$

donde:

$$\frac{1}{Z} = Y \qquad\qquad \theta = -\varphi$$

Exemplo 6.1: Resolva o circuito da figura 6.1.

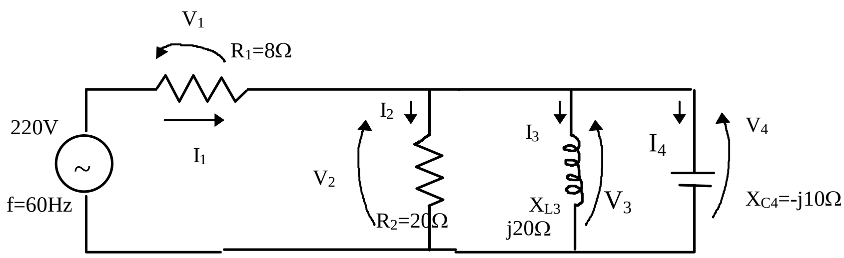



**Figura 6.1 - Circuito para o Ex. 6.1**

Cada elemento do circuito da figura 6.1 pode ser encarado como um bipolo com impedâncias:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= R_1 = 8\Omega \\
Z_2 &= R_2 = 20\Omega \\
Z_3 &= j20\Omega \\
Z_4 &= -j10\Omega
\end{aligned}
$$

Assim sendo, a impedância total vista pelo gerador pode ser dada por:

$$Z = Z_1 + Z_{2,3,4} = Z_1 + Z_2 \,//\, Z_3 \,//\, Z_4$$

onde o símbolo // significa “paralelo”. Por analogia de circuitos C.C., temos que:

$$\frac{1}{Z_2 \,//\, Z_3 \,//\, Z_4} = Y_{2,3,4} = Y_2 + Y_3 + Y_4 = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{20} = \frac{1}{J20} = \frac{1}{-J10}$$

$$Y_{2,3,4} = 0{,}05 - J0{,}05 + J0{,}1 = 0{,}05 + J0{,}05 = 0{,}07071\underline{/\,45^{O}}S$$

e $\quad Z_{2,3,4} = \dfrac{1}{Y_{2,3,4}} = 14{,}1242\underline{/-45^{O}}\Omega$

e $\quad Z = Z_1 + Z_{2,3,4,} = 8 + 14{,}1242\underline{/-45^{O}}\Omega = 18 - 10j10 = 20{,}591\underline{/-29{,}05^{O}}\Omega$

logo:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{220\underline{/\,0^{o}}}{20{,}591\underline{/-29{,}05}} = 10{,}684\underline{/\,29{,}05^{o}}A \Rightarrow \dot{V}_1 = R_1\,\dot{I}_1 =$$

$$= 8x10{,}68\underline{/\,29{,}05^{o}} = 85{,}47\underline{/\,29{,}05^{o}}$$

$$\dot{V}_2 = 220 - \dot{V}_1 = 220 - 85{,}47\underline{/\,29{,}05^{o}} = 145{,}28 - j41{,}50 = 151{,}09\underline{/-15{,}94^{o}}V$$

$$(= \dot{V}_3 = \dot{V}_4)$$

e:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{R_2} = \frac{151{,}09\underline{/-15{,}94^{o}}}{20} = 7{,}5545\underline{/-15{,}94^{o}}A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_2}{j20} = \frac{151{,}09\underline{/-15{,}94^{o}}}{20\underline{/\,90^{o}}} = 7{,}5545\underline{/-105{,}94^{o}}A$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_2}{-j10} = \frac{151{,}09\underline{/-15{,}94^o}}{10\underline{/-90^o}} = 15{,}109\underline{/74{,}06^o}A$$

Verificação: aplicando-se a 1ª Lei de Kirchhoff, temos:

$$\dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 9{,}339 + j5{,}189 = 10{,}684\underline{/29{,}05^o}A = \dot{I}_1$$

Podemos também determinar as potências complexas (ativa, reativa e aparente) em cada bipolo:

Bipolo 1: $\overline{S}_1 = \dot{V}_1 \dot{I}_1^* = 85{,}47\underline{/29{,}05^o}x10{,}684\underline{/-29{,}05^o} = (913{,}16 + j0)VA$

Bipolo 2: $\overline{S}_2 = \dot{V}_2 \dot{I}_2^* = 151{,}09\underline{/-15{,}94^o}x7{,}5545\underline{/15{,}94^o} = (1141{,}41 + j0)VA$

Bipolo 3: $\overline{S}_3 = \dot{V}_3 \dot{I}_3^* = 151{,}09\underline{/-15{,}94^o}x7{,}5545\underline{/+105{,}94^o} = (0 + j1141{,}41)VA$

Bipolo 4: $\overline{S}_4 = \dot{V}_4 \dot{I}_4^* = 151{,}09\underline{/-15{,}94^o}x15{,}109\underline{/-74{,}06^o} = (0 - j2282{,}82)VA$

A potência complexa fornecida pelo gerador pode também ser avaliada por:

$$\overline{S}_G = \dot{V}.\dot{I}_1^* = 220\underline{/0^o}x10{,}68\underline{/-29{,}05^o} = 2350{,}48\underline{/-29{,}05^o} = (2054{,}8 - j1141{,}4)VA$$

Verificação: o princípio da conservação de energia também é válido para corrente alternada. A potência complexa fornecida pelo gerador deve ser igual àquela absorvida pelos elementos passivos. Isto equivale a dizer que a potência ativa (ou reativa) absorvida:

$$\begin{aligned}\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 + \overline{S}_4 &= (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + j(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) \\ &= (913{,}16 + 1141{,}41 + 0 + 0) + \mathrm{j}(0 + 0 + 1141{,}411 - 2282{,}81) \\ &= (2054{,}6 - 1141{,}41)\mathrm{VA} \\ &= (\cong \mathrm{P_G} + jQ_G = \overline{S}_G\,!)\end{aligned}$$

**Exemplo 6.2**

Para o circuito da figura 6.2, que é alimentado por gerador ideal de tensão com $v(t)=220\sqrt{2}\,\mathrm{sen}377t$, pede-se:

a. circuito equivalente de Thevenin visto dos pontos A e B.

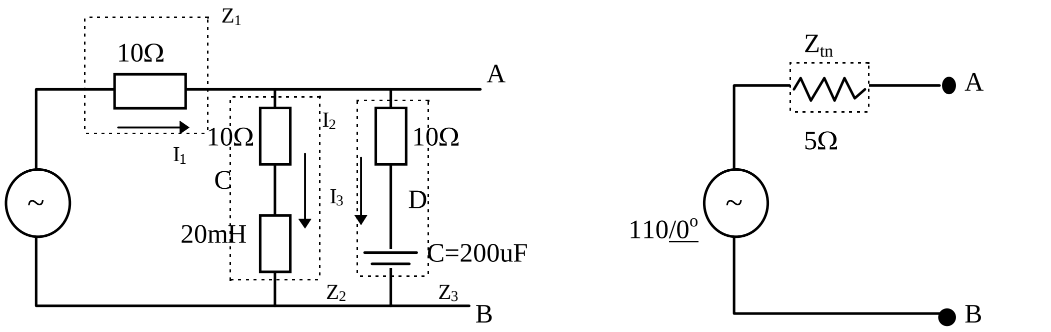
b. A corrente que flui entre entre A e B quando;

b.1 - ocorre um curto-circuito entre os terminais A e B.

b.2 - o circuito alimenta carga de 20Ω.

c. Os fasores das correntes $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ e $\dot{I}_3$ e o fasor da tensão entre os pontos C e D quando os terminais A e B estão em aberto.

d. As potências ativa e reativa absorvidas pela carga do item b.2 (20Ω entre A e B) e, nessa condição, as potências ativa e reativa fornecidas pelo gerador.




a) Circuito para o exemplo 2 b) Circuito equivalente de Thévenin

**Figura 6.2**

a) Circuito equivalente de Thévenin

Sendo $Z_1 = 10\Omega,\ Z_2 = 10 + j377x20x10^{-3} = (10 + j7{,}54)\Omega = 12{,}52\underline{/\ 37^o}\Omega$ e

$Z_3 = 10 - j\dfrac{1}{377x200x10^{-6}} = (10 - j13{,}26)\Omega = 16{,}61\underline{/-53^o}\Omega$ , temos que:

$$Z_{2,3} = Z_2\ //Z_3 = \frac{12{,}52\underline{/\ 37^o}x16{,}61\underline{/-53^o}}{10 + j7{,}54 + 10 - j13{,}26} = 10 - j0 = 10\underline{/\ 0^o}\Omega$$

Portanto, a tensão $V_{AB}$, com os terminais em vazio vale:

$$\dot{V}_{th} = \dot{V}_{AB} = \dot{I}_1 \; Z_{2,3} = \frac{\dot{V}}{Z_1 + Z_{2,3}} Z_{2,3} = \frac{220\underline{/\,0^o}}{10+10} 10 = 11\underline{/\,0^o}.10 = 110\underline{/\,0^o} \quad \mathrm{V}$$

Para a determinação da impedância de Thévenin, basta curto-circuitar o gerador de tensão e portanto:

$$Z_{th} = Z_{2,3} \, / \, / Z_1 = \frac{10.10}{10+10} = 5\Omega$$

b.1 - $$\dot{I}_{CC} = \frac{\dot{V}_{th}}{Z_{th}} = \frac{110\underline{/\,0^o}}{5} = 22\underline{/\,0^o} A$$

b.2 - $$\dot{I}_{AB} = \frac{110}{5+20} = \frac{110}{25} = 4{,}4\underline{/\,0^o} A$$

c) do item a) vimos que $\dot{I}_1 = 11\underline{/\,0^o} A$ e $\dot{V}_{AB} = 101\underline{/\,0^o} V$ . Logo:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{AB}}{Z_2} = \frac{110}{12{,}52\underline{/\,37^o}} = 8{,}79\underline{/\,-37^o} A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_{AB}}{Z_3} = \frac{110}{16{,}61\underline{/\,-53^o}} = 6{,}62\underline{/\,+53^o} A$$

e

$$\dot{V}_{R2} = 10.\dot{I}_2 = 87{,}9\underline{/\,-37^o} V$$

$$\dot{V}_{R3} = 10.\dot{I}_3 = 66{,}2\underline{/\,53^o} V$$

A d.d.p. entre os pontos C e D, $\dot{V}_{CD}$ , pode ser calculada por:

$$\dot{V}_{CD} = \dot{V}_{R3} - \dot{V}_{R2} = 66{,}2\underline{/\,53^o} - 87{,}9\underline{/\,-37^o} = 110\underline{/\,164^o} V$$

d) Carga de *R*=20Ω: $\dot{I}_{AB} = 4{,}4 A \Rightarrow P = R.I_{AB}^2 = 20x4{,}4^2 = 387{,}2W$ e Q = 0

Temos que, nesta condição, $\dot{V}_{AB} = R.\dot{I}_{AB} = 20 \, . \, 4{,}4 = 88\underline{/\,0^o}V$ . Logo:

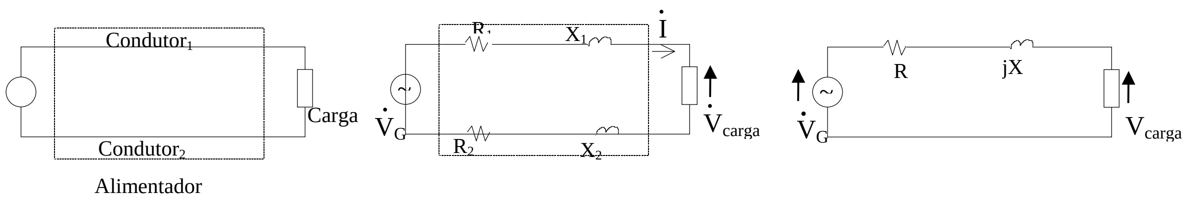
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_G - \dot{V}_{AB}}{R_1} = \frac{220-88}{10} = 13{,}2\underline{/\,0^o}A$$

e

$$\begin{aligned} \overline{S}_G &= \dot{V}.\dot{I}_1^* = 220\underline{/\,0^o}x13{,}2\underline{/\,0^o} = (2904 + j0)VA, \text{ ou seja} \\ P_G &= 2904W \\ Q_G &= 0VAr \end{aligned}$$

### *6.2 Queda de Tensão em Alimentadores*

Um alimentador monofásico pode ser construído ligando-se uma fonte de tensão à uma carga (por exemplo, uma indústria) através de dois fios condutores. Cada condutor possui uma resistência e indutância própria, conforme esquema e circuito da figura 6.3.




a) Diagrama b) Circuito equivalente c) Impedância total da linha

**Figura 6.3**

A queda de tensão ($\Delta\dot{V}$) é definida como sendo a diferença entre a tensão da fonte ($\dot{V}_G$) e a tensão da carga ($\dot{V}_{carga}$):

$$\begin{aligned} \Delta\dot{V} = \dot{V}_G - \dot{V}_{carga} &= (R_1 + jX_1)\dot{I} + (R_2 + jX_2)\dot{I} \\ &= [(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)]\dot{I} = (R + jX)\dot{I} \end{aligned}$$

e sendo os dois condutores iguais: $R = 2\,R_1$, e $X$=2 $X_1$. Conhecendo-se a impedância de cada condutor por comprimento ($r_1$+$jx_1$), em Ω/km, pode-se avaliar $R+jX = 2.l.(r_1+jx_1)$ onde $l$ é o comprimento total de cada condutor.

**Exemplo 6.3**

Suponha que, numa residência, a distância entre o quadro de distribuição de luz e a tomada de um chuveiro elétrico é de 10m. Suponha também que o chuveiro absorve 4000W com tensão de 220V. Considere os condutores com fio 2,5mm$^2$ com resistência $r$=0,007Ω/m e reatância $x$=0,0001Ω/m. Determine a queda de tensão do alimentador:

Resolução:

Considerando $\dot{V}_{carga} = 220\underline{/\ 0^o}V$ e sendo $P_{\text{carga}} = V_{\text{carga}} I_{\text{carga}} \cos\varphi_{\text{carga}}$ e $\cos\varphi_{\text{carga}} = 1$ (chuveiro é composto somente por resistência), temos:

$$\left|\dot{I}_{carga}\right| = \frac{4000}{220.1} = 18{,}18A \quad \text{e}$$

$$\dot{I}_{carga} = 18{,}18\underline{/\ 0^o}$$

logo:

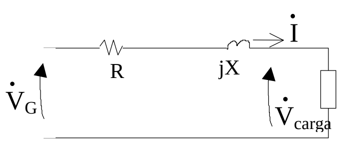
$$\Delta\dot{V} = (r + jx)2\lambda\dot{I}_{carga}$$

$$\Delta\dot{V} = (0{,}007 + j0{,}0001).2.10.18{,}18 = 2{,}54\underline{/\ 0{,}82^o}V$$

ou seja, o módulo da queda de tensão é de 2,54V e seu o valor percentual vale:

$$\Delta\dot{V}_{\%} = \frac{2{,}54}{220}x100\% = 1{,}15\%$$

Em geral, pode-se desprezar a parte imaginária da queda de tensão para efeito de cálculo de queda de tensão. Seja o diagrama de fasores do circuito da figura 6.4, onde assumimos um fator de potência da carga indutiva (cosφ) conhecido e a tensão na carga com fase nula.



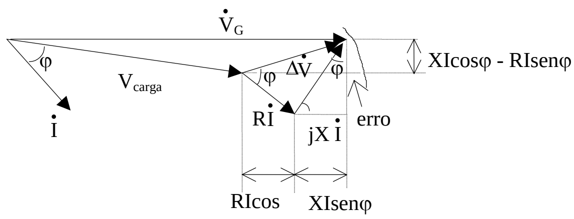



**Figura 6.4**

Temos que:

$$\dot{V}_G = \dot{V}_{carga} + (R + jX)I\underline{/-\varphi}$$

$$= V_{carga}\underline{/0^o} + (R + jX)\,I(\cos\varphi - jsen\varphi)$$

$$\dot{V}_G = (V_{carga} + RI\cos\varphi + XIsen\varphi) + j(XI\cos\varphi - RIsen\varphi)$$

Observa-se que, para a obtenção de $\dot{V}_G$ a partir de $\dot{V}_{carga}$ temos que a parte imaginária é realmente desprezível para nossas aplicações em instalações:

$$X\ I\cos\varphi - RIsen\varphi << V_{carga} + RI\cos\varphi + XIsen\varphi$$

Portanto, adotamos a queda de tensão como sendo:

$$\Delta V = V_G - V_{carga} = RI\cos\varphi + XIsen\varphi = I(R\cos\varphi + Xsen\varphi)$$

Notamos que, para o exemplo 6.3, o cálculo de tensão, com a aproximação feita, incorreria em nenhum erro:

$$\Delta V = RI\cos\varphi + XIsen\varphi =$$
$$\Delta V = 0{,}007x2x10x18{,}18x1 + 0$$
$$\Delta V = 2{,}54V$$

**Exemplo 6.4**

Uma indústria é alimentada com tensão de 1000V (eficazes) e frequência de 60Hz. A indústria conta com três tipos de carga, quais sejam:

i) Motores de indução, potência total de 50HP (1HP=746W), fator de potência 0,85 indutivo.
ii) Iluminação, corrente absorvida de 60A, fator de potência 0,9 indutivo.
iii) Fornos, potência ativa de 150kW e potência reativa de 80kVAr.

Pede-se:

a) as potências ativa, reativa e complexa e o fator de potência de cada carga e do conjunto.
b) qual seria o valor mensal gasto pela indústria pelo consumo de energia elétrica por mês, supondo que as cargas ficassem permanentemente ligadas e que o valor do custo da energia é de 60 US$/MWh ? A indústria receberia multa pelo fator de potência estar abaixo de 0,92 ?
c) as correntes absorvidas em cada carga e pelo conjunto, e o diagrama de fasores da tensão e correntes.
d) determinar a queda de tensão e as perdas elétricas em potência ativa de um alimentador que supre as cargas acima, e que apresenta resistência elétrica de 0,1Ω e reatância indutiva de 0,05Ω.

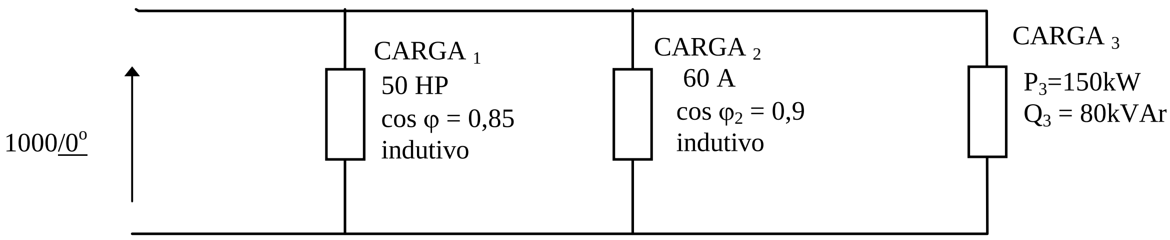



**Figura 6.5 - Circuito para o Ex. 6.4**

a) Carga 1:

$P_1 = 50x746W = 37300W$ (assumindo-se rendimento da carga = 100%)

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_1} = 43882VA \Rightarrow Q_1 = \sqrt{S_1{}^2 - P_1{}^2} = 23118VAr$$

Carga 2:

$$P_2 = 60x1000x\cos\varphi_2 = 54000W$$

$$S_2 = VI_2 = 60000VA \Rightarrow Q_2 = \sqrt{S_2{}^2 - P_2{}^2} = 26153VAr$$

Carga 3:

$$P_3 = 150000W \qquad Q_3 = 80000VAr$$
$$\Rightarrow S_3 = \sqrt{P_3^{\ 2} - Q_3^{\ 2}} = 170000VA = 170kVA$$

Total:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 + P_3 = 241300W = 241{,}3kW$$

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 129271VAr = 129{,}271kVAr$$

$$\varphi_{tot} = arctg\frac{Q_{tot}}{P_{tot}} = 28{,}18^o \Rightarrow \cos\varphi_{tot} = 0{,}8815$$

b)

$$\varepsilon_{tot} = P_{tot}\, x T_{mês} = 241{,}3kWx720h = 173.736kWh / mês$$

$$Custo = 173{,}736\, MWh / mês\ .60US\$ / \ MWh == 10.424{,}16US\$ / mês$$

O $\cos\varphi_{tot}$ é igual a 0,8815, menor que 0,92. Portanto a indústria pagaria multa.

c) carga 1:

$$\overline{S}_1 = \dot{V}\,\dot{I}_1^* \Rightarrow \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{S}_1^{\ *}}{\dot{V}^*} = \frac{P_1 - jQ_1}{\dot{V}^*} = \frac{S_1\underline{/-\varphi_1}}{V\underline{/0^o}} = \frac{43882}{1000}\underline{/-32^o} = 43{,}88\underline{/-32^o}A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{P_2 - jQ_2}{\dot{V}^*} = \frac{S_2\underline{/-\varphi_2}}{1000} = \frac{60000}{1000}\underline{/-25{,}8^o} = 60\underline{/-25{,}8^o}A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{S_3 \underline{/-\varphi_3}}{1000} = \frac{170000}{1000}\underline{/-28{,}2^o} = 170\underline{/-28{,}2^o}\,A$$

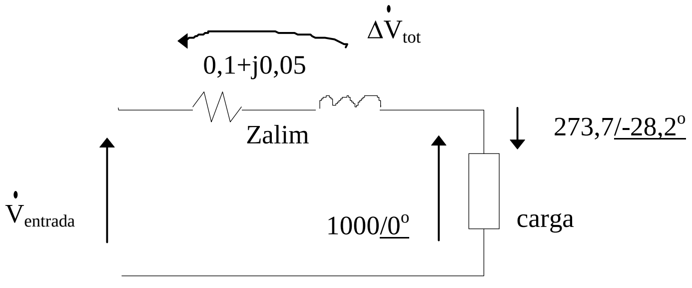
logo:

$$\dot{I}_{tot} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 241{,}0 - j129{,}7 = 273{,}7\underline{/-28{,}3^o}\,A\,.$$

Alternativamente, poderíamos calcular $\dot{I}_{tot}$ a partir da potência complexa total, calculada no item a):

$$\dot{I}_{tot} = \frac{S_{tot}\underline{/-\varphi_{tot}}}{V^*} = \frac{\sqrt{241{,}3^2 + 129{,}271^2}}{1000}\,x10^3\underline{/-28{,}2^o} = 273{,}7\underline{/-28{,}2^o}\,A$$

d)




$$\Delta\dot{V}_{tot} = \dot{I}_{tot}\,Z_{a\lim} = 273{,}75\underline{/-28{,}18^o}(0{,}1 + j0{,}05) = 30{,}61\underline{/-1{,}61^0}\quad V$$

logo:

$$\dot{V}_{entrada} = \dot{V}_{tot} + 1000\underline{/\,0^0} = 30{,}61\underline{/-1{,}61^o} + 1000\underline{/\,0^o}$$
$$= 30{,}6 - j0{,}86 + 1000 = 1030{,}6 - j0{,}86$$
$$= 1030{,}6\underline{/-0{,}05^o}V$$