



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

*Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas*

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ENERGIA E  
AUTOMAÇÃO ELÉTRICAS**

**ESCOLA POLITÉCNICA DA USP**

**PEA - LABORATÓRIO DE INSTALAÇÕES ELÉTRICAS**

**CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA**

**Código: CA**

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2. GRANDEZAS PERIÓDICAS</b>	<b>1</b>
2.1 Definições	1
2.2 Grandezas Alternadas	3
2.3 Grandezas Senoidais	3
2.4 Algumas Operações Com Grandezas Senoidais	7
2.5 Representação Fasorial Das Grandezas Senoidais	9
2.6 Números Complexos	10
<b>3. GERAÇÃO DE F.E.M. SENOIDAL</b>	<b>22</b>
<b>4. POTÊNCIA EM CIRCUITOS COM EXCITAÇÃO SENOIDAL</b>	<b>23</b>
<b>5. CIRCUITOS ELEMENTARES COM EXCITAÇÃO SENOIDAL</b>	<b>27</b>
5.1 Resistência Pura	27
5.2 Indutância Pura	29
5.3 Capacidade Pura	33
5.4 Circuito com Elementos em Série	35
<b>6. RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS C. A.</b>	<b>40</b>
6.1 Princípios Gerais	40
6.2 Queda de Tensão em Circuitos Monofásicos	47

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de circuitos de corrente alternada (C.A.) é sobretudo importante dado que a grande maioria das instalações elétricas utiliza este tipo de circuitos.

Nesta apostila, partimos de definições de grandezas periódicas, alternadas e senoidais, que são básicas para estudos de corrente alternada (C.A.). Definimos então a representação fasorial de grandezas senoidais que facilitam sobretudo a manipulação destas grandezas.

Mostramos que a geração de uma f.e.m. senoidal é relativamente simples, através de um esquema ilustrativo de um gerador C.A.. Verificamos então que o conceito de potência elétrica em C.A. exige com que sejam definidas outras grandezas auxiliares e mostramos a relação existente entre potência em circuitos C.A. e C.C..

Apresentamos então os circuitos elementares com excitação senoidal, isto é, um gerador C.A. alimentando uma resistência, uma indutância e uma capacitância, bem como a associação série destes elementos.

Analizamos então os procedimentos para a resolução de circuitos C.A. a partir da analogia com os métodos de resolução de circuitos C.C., vistos anteriormente. Damos destaque para o cálculo de queda de tensão e potências de um circuito monofásico, utilizado em muitas instalações elétricas.

## 2. GRANDEZAS PERIÓDICAS

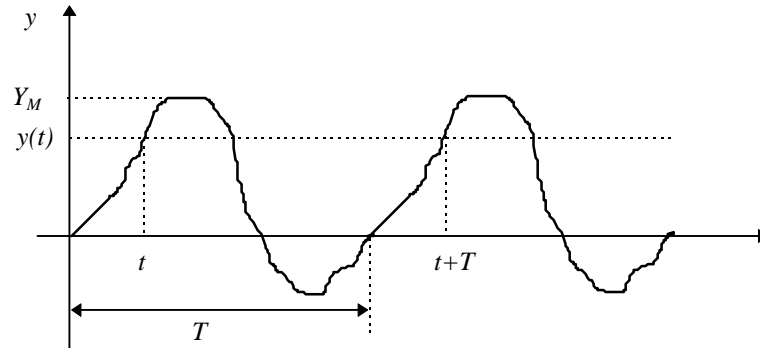
### 2.1 Definições

Dada uma função  $y = y(t)$ , figura 2.1. dizemos que essa função é uma função periódica do tempo quando se verifica a relação:

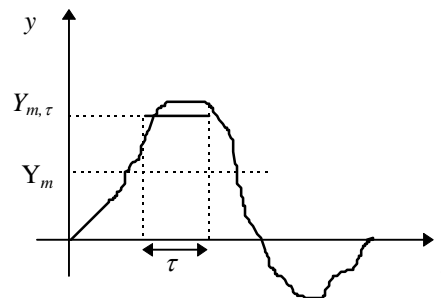
$$y(t) = y(t + nT) \quad (2.1)$$

em que  $n$  é um número inteiro qualquer. Uma grandeza periódica é aquela que a intervalos de tempo iguais correspondem valores iguais da função. Ao intervalo de tempo,  $T$ , damos o nome de período. Evidentemente o inverso do período,  $f = 1/T$ , que

recebe o nome de frequência, representa o número de ciclos que a função descreve na unidade de tempo (segundo). A unidade de frequência é o Hertz (Hz) que representa o número de ciclos que a função descreve por segundo.



**Figura 2.1 - Função Periódica do Tempo**



**Figura 2.2 - Valor Médio da Função Periódica**

A cada instante do ciclo, corresponde um valor da função que recebe o nome de valor instantâneo. Ao maior dos valores instantâneos,  $Y_M$ , dá-se o nome de valor máximo. O valor médio,  $Y_m$ , num período, é definido como (figura 2.2.):

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y dt \quad (2.2)$$

Que representa a relação da área sob a curva e o período  $T$ .

O valor médio,  $Y_{m,\tau}$ , numa fração  $\tau$  do período, pode ser definido por:

$$Y_{m\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} y dt \quad (2.3)$$

O valor eficaz,  $Y_{ef}$ , é definido como sendo a raiz quadrada do valor médio da função obtida, elevando-se ao quadrado os valores instantâneos existentes num período, isto é:

$$Y_{ef} = Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt} \quad (2.4)$$

Convencionaremos, em tudo quanto segue, designar o valor instantâneo de uma função por uma letra minúscula, os valores máximo, médio e eficaz por uma letra maiúscula acompanhada, respectivamente, por índice: "M", "m", "ef". Salientamos que o valor médio numa fração do período será designado por uma maiúscula com o índice m seguido da fração de período. Os valores eficazes serão indicados, também, por uma letra maiúscula sem índice algum.

## 2.2 Grandezas Alternadas

Uma grandeza periódica é dita alternada quando seu valor médio num período é nulo. Isto é, quando se verifica a condição:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y dt = 0$$

Para as grandezas alternadas o "fator de forma" é definido como sendo a relação entre seus valores eficaz e médio num semi-período. Isto é:

$$A = \frac{Y}{Y_{m,T/2}} \quad (2.5)$$

## 2.3 Grandezas Senoidais

Uma função do tipo:

$$y = Y_M \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right) = Y_M \operatorname{sen}(2\pi ft + \alpha) \quad (2.6)$$

que recebe o nome de função senoidal, é uma função periódica do tempo, pois:

$$y(t) = y(t + nT)$$

além disso, é uma função alternada, pois:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y dt = 0$$

Fazendo-se  $\omega$ , que é designada por pulsação, igual a  $\frac{2\pi}{T}$ , resulta:

$$y = Y_M = \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

onde:

$\omega$  é medido em radianos por segundo (rd/s)

$T$  é medido em segundos (s)

$\alpha$  é medido em radianos (rd)

Para as grandezas senoidais, o valor médio num semi-período é dado por:

$$\begin{aligned}
 Y_{MT/2} &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_M \text{sen}(\omega t + \alpha) dt = \\
 &= \frac{2Y_M}{\omega T} [\cos(\omega t + \alpha)]_0^{T/2} = \\
 &= \frac{2Y_M}{\omega T} 2 \cos \alpha = \frac{2Y_M}{\pi} \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

em particular quando  $\alpha = 0$  resulta:

$$Y_{mT/2} = \frac{2Y_M}{\pi}$$

Da (2.6.) podemos observar que o valor máximo de uma função senoidal,  $Y_M$ , ocorre nos instantes  $t_M$  que tornem unitário o termo

$$\text{sen}(2\pi f t + \alpha)$$

isto é para

$$2\pi f t_M + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \quad (K = 0, 1, 2, \dots)$$

ou seja:

$$t_M = \left( \frac{\pi}{2} + 2K\pi - \alpha \right) \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{4} + KT - \frac{\alpha T}{2\pi}$$

Na equação 2.6 temos:

$Y_M$  = valor máximo da grandeza senoidal, medido numa unidade qualquer

$y$  = valor da grandeza senoidal no instante  $t$ , medido na mesma unidade de que  $Y_m$

$T$  = período da grandeza senoidal, medido em segundos (s)

$f = 1/T$  = frequência da grandeza senoidal medida em Hertz (Hz)

$t$  = instante genérico em que se quer determinar a grandeza senoidal expressa em segundos (s)

$\alpha$  = fase inicial, ou simplesmente, fase da grandeza senoidal expressa em radianos (rd)

Na equação 2.6 o termo  $2\pi f$ , que representa o número de radianos descritos na unidade de tempo, é designado por pulsação angular (rd/s) e representado pelo símbolo  $\omega$ , isto é:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ou ainda:

$$\omega T = 2\pi$$

Para as grandezas senoidais o valor médio num semi-período depende da fase inicial da grandeza, isto é:

$$Y_{m,T/2} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_M \text{sen}(\omega t + \alpha) dt = \left[ \frac{Y_M}{\omega T/2} - \cos(\omega t + \alpha) \right]_0^{T/2} = \frac{2Y_M}{\omega} \cos \alpha$$

Com o objetivo de eliminar tal dependência convencionou-se definir o valor médio de uma grandeza senoidal no intervalo de tempo de  $\frac{-\alpha}{\omega}$  a  $\left(\frac{T}{2} - \frac{\alpha}{\omega}\right)$ , resultando:

$$Y_{m,T/2} = \frac{1}{T/2} \int_{-a/\omega}^{\left(\frac{T}{2} - \frac{a}{\omega}\right)} Y_M \text{sen}(\omega t + a) dt = \frac{2Y_M}{\pi} \quad (2.8)$$

Para as grandezas senoidais, o valor eficaz e o fator de forma (*F.F.*) têm os seguintes valores:

$$Y = Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T Y_M^2 \text{sen}^2 \omega t dt} = \frac{Y_M}{\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

$$F.F. = \frac{Y}{Y_{mT/2}} = \frac{\frac{Y_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} Y_M} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (2.10)$$

Dada uma segunda grandeza senoidal:

$$y' = Y'_M \text{sen}(\omega t + \beta)$$

diz-se que entre as grandezas  $y$  e  $y'$  há uma diferença de fase:

$$\psi = \alpha - \beta$$

que é independente do instante inicial considerado. Em outras palavras, se tomarmos a grandeza  $y$  com fase inicial nula, a grandeza  $y'$  terá fase inicial  $\psi = \alpha - \beta$ .

Fixa-se o sentido anti-horário como o positivo na medida dos ângulos de fase. Deste modo, quando  $\psi > 0$ , diz-se que a grandeza  $y$  está adiantada de ângulo  $\psi$  sobre a  $y'$ ; e vice-versa, quando  $\psi < 0$ , diz-se que a grandeza  $y'$  está atrasada de ângulo  $\psi$  em relação a  $y$ . Finalmente, quando  $\psi = 0$ , diz-se que as duas grandezas estão em fase.

## 2.4 Algumas operações com grandezas senoidais



Dadas duas funções senoidais  $y = Y_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$  e  $y' = Y'_M \text{sen}(\omega' t + \alpha')$  temos que:

A) As duas grandezas senoidais são ditas iguais quando, em qualquer instante, seus valores instantâneos forem iguais, isto é quando tiverem mesma frequência, mesmo valor máximo e mesma fase inicial.

B) A soma de duas grandezas senoidais pode ser calculada, para  $\omega = \omega'$ , como:

$$e = Y_M \text{sen}(\omega t + \alpha) + Y'_M \text{sen}(\omega' t + \alpha')$$

ou

$$e = (Y_M \cos \alpha + Y'_M \cos \alpha') \text{sen} \omega t + (Y_M \text{sen} \alpha + Y'_M \text{sen} \alpha') \cos \omega t$$

Fazendo  $e = C_M \text{sen}(\omega t + \theta) = (C_M \cos \theta) \text{sen} \omega t + (C_M \text{sen} \theta) \cos \omega t$ , resulta:

$$C_M \cos \theta = Y_M \cos \alpha + Y'_M \cos \alpha'$$

$$C_M \text{sen} \theta = Y_M \text{sen} \alpha + Y'_M \text{sen} \alpha'$$

ou seja:

$$\text{tg} \theta = \frac{Y_M \text{sen} \alpha + Y'_M \text{sen} \alpha'}{Y_M \cos \alpha + Y'_M \cos \alpha'} \quad (2.11)$$

e

$$C_M = \sqrt{Y_M^2 + Y'^2_M + 2Y_M Y'_M \cos(\alpha - \alpha')} \quad (2.12)$$

C) O produto das duas grandezas pode ser avaliado por:

$$e = yy' = Y_M Y'_M \text{sen}(\omega t + \alpha) \text{sen}(\omega' t + \alpha')$$

lembrando que

$$\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha) = 2 \text{sen} \beta \text{sen} \alpha$$

e supondo  $\omega = \omega'$ , resulta

$$C = \frac{1}{2} Y_M Y'_M [(\cos(\alpha - \alpha') - \cos(2\omega t + \alpha - \alpha'))]$$

D) A derivada da Função Senoidal  $y$  em relação ao tempo é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \omega Y_M \cos(\omega t + \alpha) = \omega Y_M \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

isto é, é uma função senoidal de mesma frequência que a dada, de valor máximo igual ao da função dada, multiplicado por sua pulsação e adiantada de  $90^\circ$  em relação a dada.

Exemplo 2.1. - Dadas as grandezas senoidais

$$y = 10\operatorname{sen}\left(377t + \frac{\pi}{6}\right)$$

e

$$y = 20\operatorname{sen}\left(377t + \frac{\pi}{3}\right)$$

determinar as grandezas soma e produto.

Pelas equações 2.11 e 2.12, resulta:

$$C_M = \sqrt{100 + 400 + 400\cos 30} = 29,093$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{10\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + 20\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{10\cos\frac{\pi}{6} + 20\cos\frac{\pi}{3}} = 1,1961$$

$$\theta = 0,8745\operatorname{rad} = 50,1^\circ$$

donde:

$$C = 29,093\operatorname{sen}(377t + 0,8745)$$

Na figura 2.4 está representada a soma gráfica das funções  $y$  e  $y'$ .

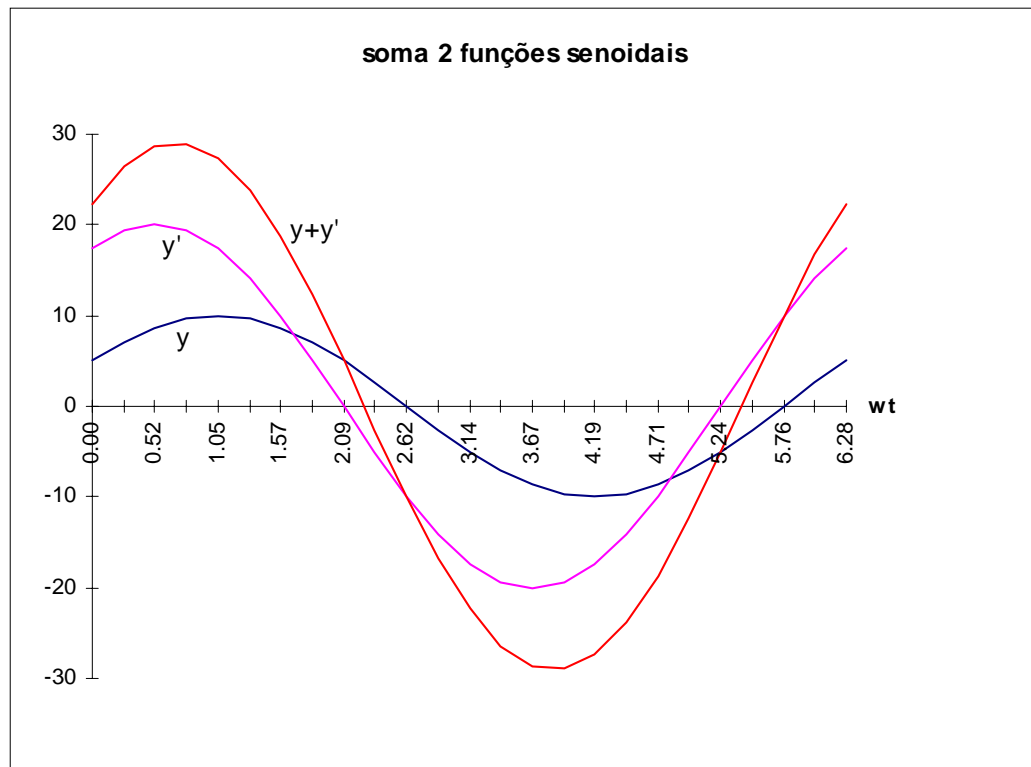


Figura 2.4 - Soma das funções  $y$  e  $y'$  (exemplo 2.1)

Pela equação 2.13 o produto é dado por:

$$C = 100 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(754t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

isto é

$$C = 86,602 - 100 \cos\left(754t + \frac{\pi}{2}\right)$$

## 2.5 Representação Fasorial das Grandezas Senoidais

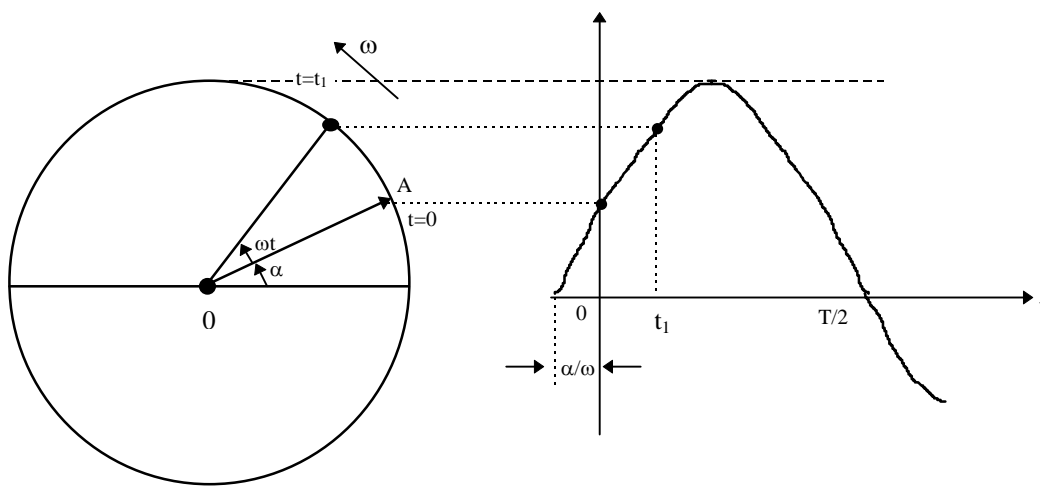
Dos itens precedentes, verificamos que a execução de operações com grandezas senoidais é muito laboriosa. Lembrando a definição de grandezas senoidais, veremos

que é possível representá-las por meio de um vetor girante tornando as operações sobremodo simplificadas. Isto é, uma grandeza senoidal está perfeitamente definida por um vetor  $OA$  de módulo igual ao valor máximo da função, que gira em torno de seu extremo  $O$  com velocidade angular  $\omega$  no sentido anti-horário e sua posição no instante  $t = 0$  é tal a formar, com a reta origem dos tempos, um ângulo igual à fase inicial da grandeza considerada (figura 2.5). É claro que a projeção do extremo  $A$  do vetor sobre uma reta perpendicular à origem dos tempos, descreverá a função senoidal:

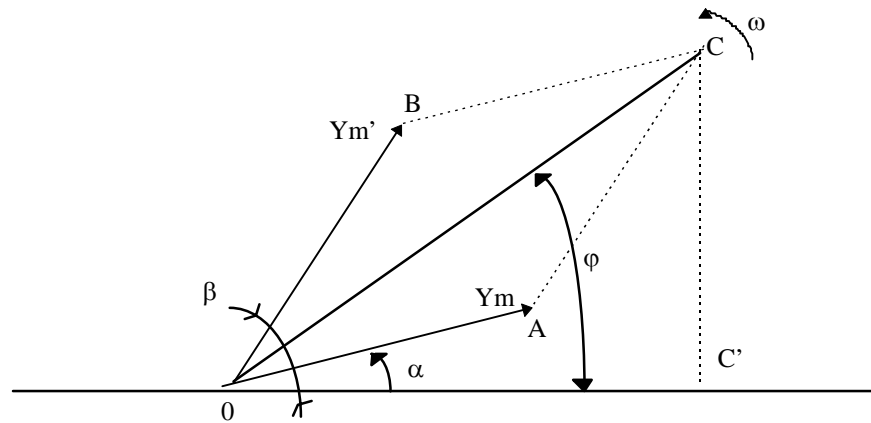
$$y = Y_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

Observamos que o vetor  $OA$  está representando uma grandeza escalar; portanto, a fim de se evitar confusão designamo-lo por vetor girante.

Suponhamos que sejam dadas duas grandezas senoidais,  $y$  e  $y'$  de mesma frequência,  $f$ , ângulos iniciais,  $\alpha$  e  $\beta$ , e módulos  $Y_M$  e  $Y'_M$ . Essas duas grandezas podem ser representadas por dois vetores girantes defasados de ângulo  $\psi = \alpha - \beta$  e de módulos  $Y_M$  e  $Y'_M$ . Salientamos que ambos giram com mesma velocidade angular; portanto sua posição relativa permanece imutada e a soma das duas, que é representada por um vetor girante, é equivalente à soma de  $Y$  e  $Y'$ , cuja obtenção gráfica é imediata (figura 2.6). De fato temos:



**Figura 2.5 - Representação de uma grandeza senoidal**



**Figura 2.6 - Representação de duas grandezas senoidais e sua soma por vetores girantes**

$$OC = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{AC} \cos \psi}$$

e

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AC} \operatorname{sen} \beta + \overline{OA} \operatorname{sen} \alpha}{\overline{AC} \cos \beta + \overline{OA} \cos \alpha}$$

isto é, a projeção do vetor  $OC$  sobre uma reta perpendicular representa a grandeza soma de  $y$  com  $y'$ .

A representação das grandezas senoidais por vetores girantes simplifica enormemente o procedimento de cálculo, porém, apresenta o inconveniente de que se realizam todas as operações graficamente, ou seja com imprecisão gráfica. Assim, com a “representação simbólica” aplica-se aos vetores girantes um procedimento de cálculo sobremodo interessante que permite eliminar as construções gráficas.

Para tanto, fixemos num plano duas direções ortogonais,  $x$  e  $y$ . Seja  $\overset{p}{k}$  um versor unitário na direção do eixo  $x$  e de sentido concorde com o sentido positivo desse eixo. É claro que  $-\overset{p}{k}$  representa o mesmo versor rodado de  $\pi$  radianos. Indicaremos ainda por  $j\overset{p}{k}$  o mesmo versor girado de  $\pi/2$  radianos no sentido anti-horário. Isto é, a grandeza  $j$  é um operador que aplicado a um vetor o gira no sentido anti-horário de  $\pi/2$  radianos, mantendo-se seu módulo constante. O operador  $j$  deve satisfazer a condição:

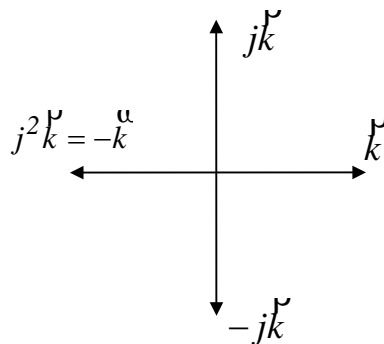
$$j(j\overset{u}{k}) = j^2\overset{u}{k} = -\overset{u}{k}$$

isto é

$$j^2 = -1$$

$$j = \sqrt{-1}$$

ou seja, o operador  $j$  representa a unidade imaginária, conforme figura 2.7.



**Figura 2.7 - Aplicação do Operador  $j$**

Um vetor qualquer  $OP$  ( $\overset{u}{I}$ ), cujas componentes segundo as direções  $x$  e  $y$ , são  $a$  e  $b$  poderá ser representado por:

$$\overset{u}{I} = (a + jb)\overset{u}{k}$$

Omitindo-se o versor  $\overset{u}{k}$  o vetor  $OP$  também estará definido. De fato, seu módulo vale:

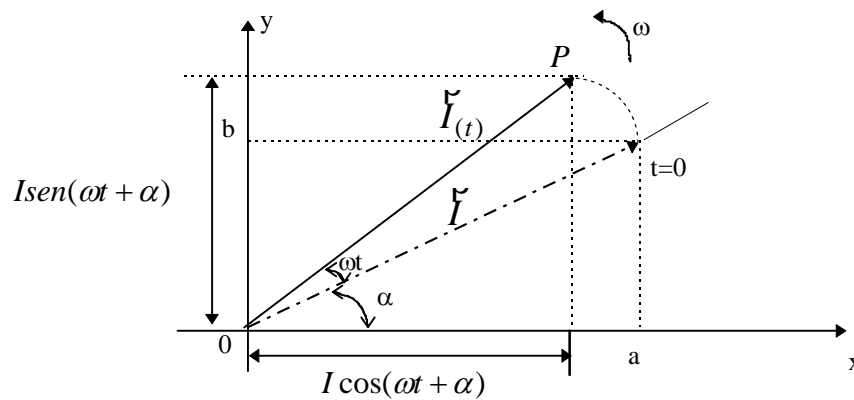
$$I = |\overset{u}{I}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e o ângulo inicial,  $\alpha$ , é dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Portanto, o vetor está perfeitamente definido. Salientamos que esse vetor está fixo em relação aos eixos  $\underline{e}$  a fim de que represente um vetor girante, deve girar em torno do ponto  $O$  com velocidade angular  $\omega = 2\pi f$ . Para tanto, conforme figura 2.8, seja  $\alpha$  o ângulo inicial de um vetor girante de módulo  $I$ ; num instante  $t$  qualquer, ele estará deslocado de sua posição inicial de  $\omega t$  e será dado por:

$$\vec{I}_{(t)} = I \cos(\omega t + \alpha) + jI \text{sen}(\omega t + \alpha)$$



**Figura 2.8 - Representação de Vetor Girante**

isto é

$$\vec{I}_{(t)} = I[(\cos \omega t \cos \alpha - \text{sen} \omega t \text{sen} \alpha) + j(\cos \omega t \text{sen} \alpha + \text{sen} \omega t \cos \alpha)]$$

sendo:

$$I \cos \alpha = a \quad \text{e} \quad I \text{sen} \alpha = b$$

resulta:

$$\vec{I}_{(t)} = (a + jb) \cos \omega t + (ja - b) \text{sen} \omega t$$

mas:

$$ja - b = (a + jb)j$$

logo:

$$\vec{I}_{(t)} = (a + jb)(\cos \omega t + j \text{sen} \omega t)$$

Lembrando que:

$$\cos \omega t + j \text{sen} \omega t = e^{j\omega t}$$

em que  $e$  é a base dos logarítmos neperianos, resulta:

$$\vec{I}_{(t)} = (a + jb)e^{j\omega t}$$

O termo  $a + jb$  representa o vetor girante no instante  $t = 0$ , e o termo  $e^{j\omega t}$  exprime a rotação do vetor de um ângulo  $\omega t$ .

A grandeza vetorial pode então ser determinada a partir do vetor girante pela expressão  $y(t) = I_m(\overset{\vee}{I}(t))$ , onde  $I_m$ , é a parte imaginária do vetor girante  $\overset{\vee}{I}$ .

Exemplo 2.2 - Dada a grandeza senoidal  $i(t) = 100\text{sen}(\omega t + 0,5236)$ , determine o vetor girante e o fasor que a representa.

Inicialmente determinaremos o vetor que representa a grandeza no instante  $t = 0$ , isto é, um vetor cujo módulo vale 100 é cujo ângulo inicial vale  $0,5236\text{rad} = 30^\circ$ . Suas componentes valem:

$$a = 100 \cos 30^\circ = 86,60$$

$$b = 100 \text{sen } 30^\circ = 50,00$$

donde:

$$a + jb = 86,60 + j50,00 = \overset{\vee}{I}_{(0)}$$

e o vetor girante é dado por:

$$\overset{\vee}{I}(t) = (86,60 + j50,00)e^{377t}$$

Exemplo 2.3 - Dado o vetor girante  $\overset{\vee}{I} = (40 + j50)e^{377t}$ , determinar:

- 1) O valor instantâneo da grandeza senoidal para o instante  $t = 1,6$  ms.
- 2) A função senoidal que ele representa.

Tem-se:

$$\overset{\vee}{I} = (40 + j50)e^{377t}$$



Para o instante  $t = 1,6 \cdot 10^{-3}$  s, resulta:

$$\underline{Y} = (40 + j50)(\cos 0,377 \times 1,6 + j \operatorname{sen} 0,377 \times 1,6)$$

ou seja:

$$\underline{Y} = (40 + j50)(0,8235 + j0,5673) = 4,575 + j63,867$$

donde:

$$i(0,0016) = I_m[\underline{Y}] = 63,867$$

A grandeza senoidal representada pelo vetor girante é

$$i = I_m[\underline{I}] = I_m[(40 + j50)e^{377t}]$$

Passando o número complexo  $40 + j50$ , para forma polar, obtemos:

$$40 + j50 = 64,031e^{j0,896}$$

donde:

$$\underline{I}_{(t)} = 64,031e^{j0,896}e^{377t} = 64,031e^{j(377t+0,896)}$$

ou

$$\underline{I}_{(t)} = 64,031[\cos(377t + 0,896) + j \operatorname{sen}(377t + 0,896)]$$

donde:

$$i = I_m[\underline{I}_{(t)}] = 64,031 \operatorname{sen}(377t + 0,896)$$

Em qualquer instante que se considere todos os vetores girantes estão em posição imutável entre si, isto é, estão todos com sua posição inicial acrescida de ângulo  $\omega t$ . Ora, nessas condições, é óbvio pensar em se eliminar o termo  $e^{j\omega t}$ , adotando-se um valor inicial arbitrário para  $t$ . Em particular, considerando que o valor inicial pode ser qualquer, adota-se usualmente  $t = 0$ . Além disso, como todas as grandezas elétricas são expressas em termos de valores eficazes, optou-se por substituir o “vetor girante” pelo

“fasor” substituindo o valor máximo pelo eficaz. Assim, para se passar do fasor para a grandeza senoidal deve-se multiplicar seu valor máximo, que é o valor eficaz da grandeza, por  $\sqrt{2}$  e imprimir-lhe rotação, por meio de  $e^{j\omega t}$ , para finalmente tomar sua parte imaginária. Assim, para o Exemplo 2.3, o fasor da grandeza senoidal vale:

$$\dot{I} = \frac{40 + j50}{\sqrt{2}} = 42,58e^{j0,896}$$

Sejam  $y$  e  $y'$  duas grandezas senoidais de mesma frequência,  $f$ , de módulos  $Y_M$  e  $Y'_M$  e de ângulos iniciais  $\alpha$  e  $\beta$  e das quais desejamos obter a soma. Teremos os seguintes vetores girantes:

$$\overset{p}{Y}_{(t)} = (a + bj).e^{j\omega t}$$

$$\overset{p'}{Y}_{(t)} = (a' + b'j).e^{j\omega t}$$

em que:

$$a = Y_M \cos \alpha \quad \text{e} \quad a' = Y'_M \cos \beta$$

A soma das duas funções é representada pelo vetor girante  $\overset{p}{C}$  obtida por:

$$\overset{p}{C} = \overset{p}{Y} + \overset{p'}{Y} = (a + bj).e^{j\omega t} + (a' + b'j).e^{j\omega t}$$

ou

$$\overset{p}{C} = [(a + a') + j(b + b')]e^{j\omega t}$$

e o fasor  $\dot{C}$  correspondente vale:

$$\dot{C} = (a + a') + j(b + b')$$

A derivada do vetor  $\overset{p}{Y}$  é dada por:

$$\frac{d\overset{p}{Y}}{dt} = \frac{d}{dt} |(a + bj).e^{j\omega t}| = j\omega(a + bj).e^{j\omega t}$$

isto é, o fasor derivada tem módulo  $\omega$  vezes maior e está adiantado de  $\pi/2$  radianos e é igual a  $j\omega(a + jb)$  ou  $(-\omega b + j\omega a)$ .

---

Exemplo 2.4 - Dadas as grandezas senoidais  $y = 100 \text{ sen}(377t + 0,6981)$  e  $y' = 200 \text{ sen}(377t + 0,6109)$ , pede-se determinar a grandeza soma.

Os vetores girantes serão dados por:

$$\overset{p}{Y} = 100(\cos 0,6981 + j \text{sen} 0,6981)e^{j377t}$$

$$\overset{p}{Y}' = 200(\cos 0,6109 + j \text{sen} 0,6109)e^{j377t}$$

donde os fasores:

$$\overset{\bullet}{Y} = \frac{100}{\sqrt{2}}(\cos 0,6981 + j \text{sen} 0,6981)e^{j377 \cdot 0} = 54,1690 + j45,4502$$

$$\overset{\bullet}{Y}' = \frac{200}{\sqrt{2}}(\cos 0,6109 + j \text{sen} 0,6109)e^{j377 \cdot 0} = 115,8428 + j81,1200$$

Finalmente tem-se

$$\overset{\bullet}{C} = \overset{\bullet}{Y} + \overset{\bullet}{Y}' = 170,0118 + j126,5702 = 211,9529e^{j0,64}$$

o vetor girante correspondente será:

$$\overset{p}{C} = 211,9529\sqrt{2}e^{j0,64}e^{377t} = 299,7467e^{j(377t+0,64)}$$

donde:

$$C = I_m |\overset{p}{C}| = 299,7467 \text{ sen}(377t + 0,64)$$


---

## 2.6 Números Complexos

A seguir serão lembradas algumas propriedades dos números complexos que serão úteis nas operações com o método simbólico. Assim, dizemos que um número complexo está na forma binominal quando é representado pelo binômio  $a + jb$ . Pode-se representá-lo na forma polar por  $\rho(\cos\alpha + j\text{sen}\alpha) = a + jb$  bastando, para tanto, que na expressão exista a igualdade entre as partes reais e imaginárias, isto é:

$$\rho \cos \alpha = a$$

$$\rho \text{sen} \alpha = b$$

donde:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

Dizemos que dois números complexos na forma binominal são iguais quando existir a igualdade entre suas partes reais e suas partes imaginárias. Evidentemente, quando na forma polar, teremos a igualdade, entre si, dos módulos e fases.

Soma-se ou subtrai-se números complexos facilmente, desde que estejam na forma binominal, pois é suficiente somar (subtrair) entre si as partes reais e as imaginárias, isto é:

$$a_1 + jb_1 \pm (a_2 + jb_2) = a + jb$$

em que:

$$a = a_1 \pm a_2$$

$$b = b_1 \pm b_2$$

Por outro lado, o produto e o quociente entre números complexos é facilmente realizado quando estes estiverem na forma polar, pois é suficiente multiplicar (dividir) os módulos e somar (subtrair) os argumentos, isto é:

$$\begin{aligned} & \rho_1(\cos \alpha_1 + j \operatorname{sen} \alpha_1) \cdot \rho_2(\cos \alpha_2 + j \operatorname{sen} \alpha_2) = \\ & \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) + \\ & j \rho_1 \rho_2 (\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) = \\ & \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + j \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)] \end{aligned}$$

Ou seja, o produto é  $\rho(\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha)$ , onde  $\rho = \rho_1 \rho_2$  e  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Além disso, seja:

$$\frac{\rho_1(\cos \alpha_1 + j \operatorname{sen} \alpha_1)}{\rho_2(\cos \alpha_2 + j \operatorname{sen} \alpha_2)} = \rho(\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha)$$

será

$$\rho_1(\cos \alpha_1 + j \operatorname{sen} \alpha_1) = \rho \rho_2 |\cos(\alpha_2 + \alpha) + j \operatorname{sen}(\alpha_2 + \alpha)|$$

e pela definição de igualdade de números complexos, devemos ter:

$$\rho_1 = \rho \rho_2 \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha$$

donde:

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

É usual representar-se um número complexo na forma polar dando-se seu módulo e seu argumento, isto é:

$$\rho(\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha) = \rho / \underline{\alpha}$$

Exemplo 2.5 - Dados os números complexos:

$$10 / \underline{30^\circ} \quad \text{e} \quad 20 / \underline{-45^\circ}$$

pede-se sua soma e sua diferença.

Tem-se:

$$\dot{C}_1 = 10/\underline{30^\circ} = 10(\cos 30 + j\text{sen}30) = 8,660 + j5,000$$

$$\dot{C}_2 = 20/\underline{-45^\circ} = 20(\cos 45 + j\text{sen}45) = 14,142 - j14,142$$

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = 22,802 - j9,142 = 24,566/\underline{-21,85^\circ}$$

$$\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = 5,482 + j19,142 = 19,912/\underline{105,98^\circ}$$

Exemplo 2.6 - Dados os números complexos  $(3 + j4)$  e  $(-7 + j12)$ , pede-se seu produto e seu quociente.

Tem-se:

$$\dot{C}_1 = 3 + 4j = 5/\underline{53,13^\circ}$$

$$\dot{C}_2 = -7 + 12j = 13,89/\underline{120,26^\circ}$$

$$\dot{C} = \dot{C}_1 \cdot \dot{C}_2 = 69,45/\underline{173,39^\circ}$$

$$\dot{C}' = \dot{C}_1 / \dot{C}_2 = 0,36/\underline{-67,13^\circ}$$

E na forma retangular, temos:

$$C_r = C \cos \alpha = 69,45 \cdot \cos 173,39 = -68,988$$

$$C_i = C \text{sen} \alpha = 69,45 \cdot \text{sen} 173,39 = 7,994$$

$$C'_r = C' \cos \alpha' = 0,36 \cdot \cos 67,13 = 0,140$$

$$C'_i = C' \text{sen} \alpha' = -0,36 \cdot \text{sen} 67,13 = -0,332$$

isto é

$$C = -68,988 + j7,994$$

$$C' = 0,140 - j0,332$$

### 3. GERAÇÃO DE F.E.M. SENOIDAL

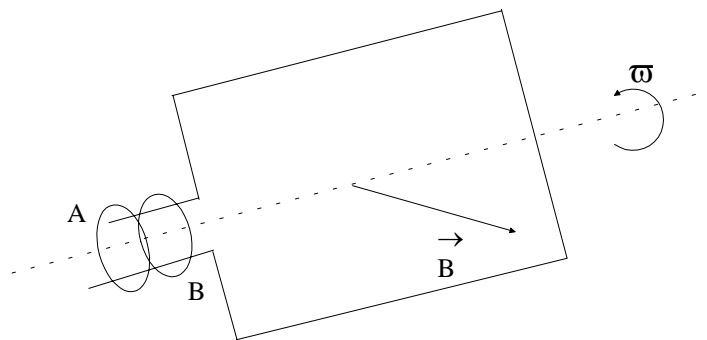
Suponhamos ter uma bobina que gira em torno de seu eixo, com velocidade angular  $\omega$ , imersa num campo magnético, de indução  $B$ , conforme figura 3.1. O fluxo concatenado com a bobina é dado por:

$$\Phi = NBS \cos \omega t$$

em que:

$N$  = número de espiras da bobina

$S$  = Área da superfície limitada pela bobina



**Figura 3.1 - Geração de f.e.m. Senoidal**

Devido à variação do fluxo concatenado com a bobina, ela será sede de uma f.e.m. induzida dada, por:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -NBS \frac{d}{dt} \cos \omega t$$

isto é

$$e = NBS\omega \sin \omega t = E_M \sin \omega t$$

onde

$$E_M = NBS\omega$$

Portanto, entre os terminais A e B da bobina existe f.e.m. induzida que varia no tempo com lei senoidal.

Ligando-se externamente aos terminais da bobina uma resistência, verificar-se-á a circulação de uma corrente que irá dissipar determinada energia. Essa é a energia mecânica fornecida à bobina e transformada em energia elétrica.

#### 4. POTÊNCIA EM CIRCUITOS COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

Suponhamos ter um gerador, cuja tensão em seus terminais varia com lei senoidal, alimentando carga tal que a corrente fornecida varie senoidalmente e esteja atrasada de ângulo  $\psi$  em relação à tensão. Isto é, sejam (figura 4.1):

$$v = V_M \text{sen}(\omega t + \theta_1)$$

$$i = I_M \text{sen}(\omega t - \psi + \theta_1)$$

a tensão e a corrente nos terminais do gerador.

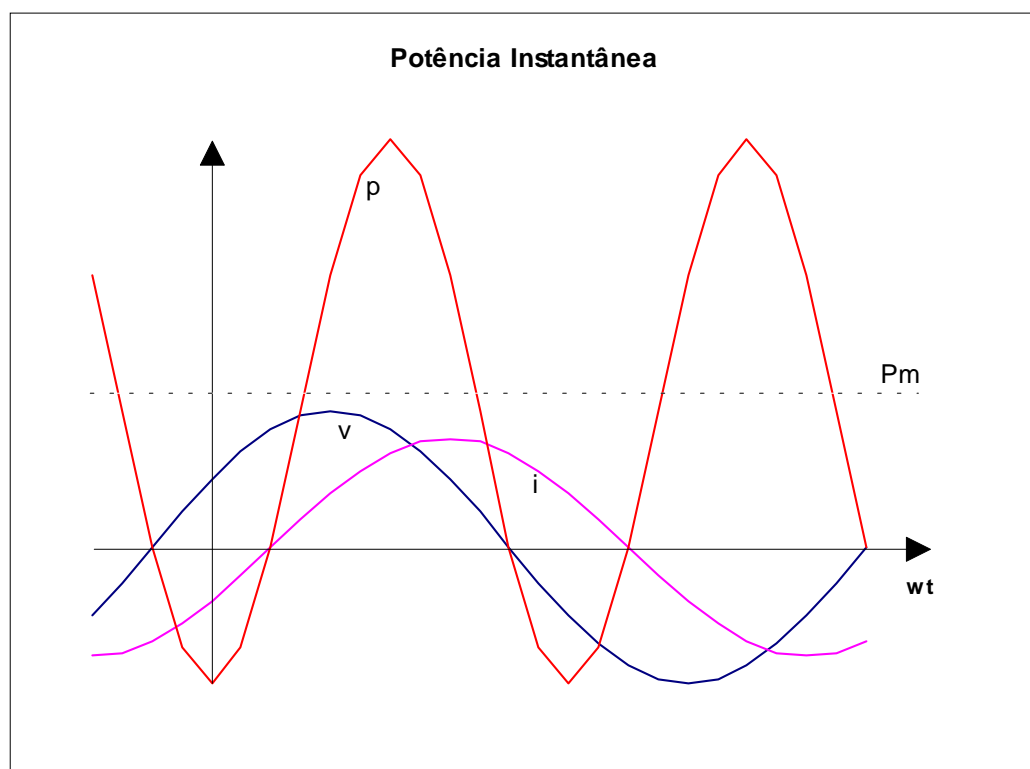


Figura 4.1 - Variação da Potência em Função do Tempo



É claro que, em cada instante, a potência fornecida pelo gerador é dada pelo produto dos valores instantâneos da tensão e corrente, isto é:

$$p = vi = V_M I_M \text{sen}(\omega t + \theta) \cdot \text{sen}(\omega t - \psi + \theta_1)$$

em que  $p$  representa o valor instantâneo da potência fornecida pelo gerador. Lembrando que:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$$

resulta

$$p = \frac{V_M I_M}{2} \left[ \cos \psi - \cos(2\omega t - \psi + 2\theta_1) \right]$$

ou ainda, sendo  $V_M = \sqrt{2} V$  e  $I_M = \sqrt{2} I$ , resulta:

$$p = VI \cos \psi + VI \text{sen}\left(2\omega t - \psi - \frac{\pi}{2} + 2\theta_1\right) \quad (4.1)$$

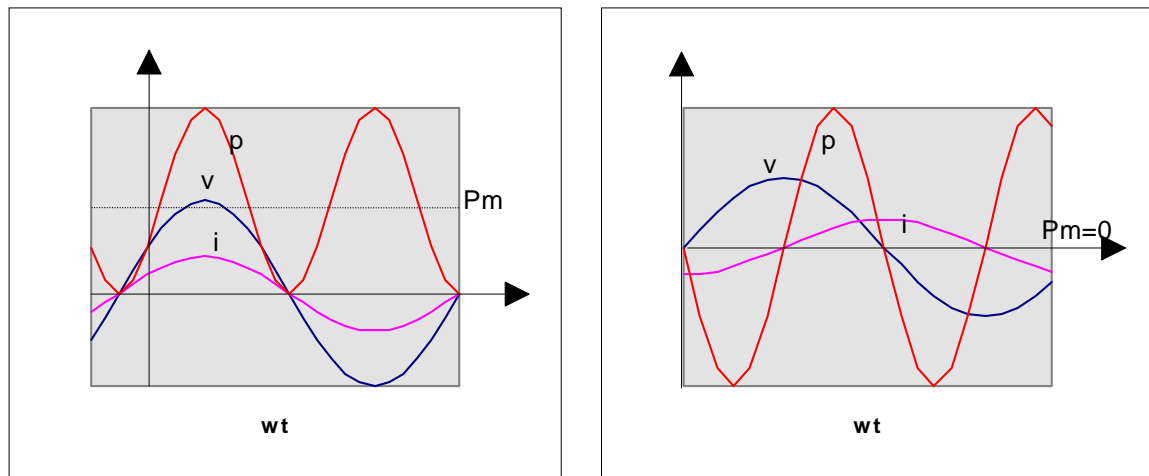
Verifica-se, assim, que a potência instantânea é composta por duas parcelas: uma constante ( $VI \cos \psi$ ) que representa a potência fornecida à carga e outra variável senoidalmente com frequência dupla da tensão aplicada, que representa a energia que ora é fornecida pelo gerador e ora é devolvida. Esta última parcela recebe a designação de potência flutuante.

O valor médio da potência num ciclo é dado por:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = VI \cos \psi \quad (4.2)$$

e recebe o nome de “potência ativa” ou mais simplesmente “potência”. Ao cosseno do ângulo de rotação de fase,  $\cos \psi$ , dá-se o nome de “fator de potência”.

Observamos que para fator de potência unitário ( $\psi = 0$ ), a potência ativa será expressa pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente. Para fator de potência nulo ( $\psi = \pi/2$ ) a potência ativa será nula, conforme ilustrado na figura 4.2.



a) Carga - fator de potência unitário ( $\psi=0$ )    b) Carga - fator de potência nulo ( $\psi=\pi/2$ )

**Figura 4.2 - Variação da potência com o tempo**

Definem-se ainda as grandezas potência aparente, potência reativa e potência complexa, que são apresentadas abaixo.

A potência aparente,  $S$ , é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente, isto é:

$$S = V \cdot I \quad (4.3)$$

sendo medida em Volt-Ampére (VA).

A potência reativa,  $Q$ , é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente pelo seno do ângulo de rotação de fase entre ambas, isto é:

$$Q = V \cdot I \cdot \text{sen} \psi \quad (4.4)$$

sendo medida em Volt-Ampére-reactivo (VAR).

Das expressões (4.2) e (4.4), resulta:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

A potência complexa,  $\bar{S}$ , é expressa por um número complexo cuja parte real é a potência ativa e cuja parte imaginária é a potência reativa, isto é:

$$\bar{S} = P + jQ = VI \cos \psi + jVI \sin \psi = VI / \underline{\psi} = \underline{S} / \underline{\psi} \quad (4.5)$$

Observando-se que a tensão e a corrente consideradas são expressas pelos fasores;

$$\dot{V} = V / \underline{\theta_1}$$

$$\dot{I} = I / \underline{\theta_1 - \psi}$$

notamos que a potência complexa é dado pelo produto:

$$\dot{V} \dot{I}^*$$

em que  $\dot{I}^*$  é o complexo conjugado da corrente, isto é:

$$\bar{S} = \dot{V} \dot{I}^* = V / \underline{\theta_1} \quad I / \underline{-\theta_1 + \psi} = VI / \underline{\psi}$$

Convencionou-se adotar como positiva a potência reativa fornecida a uma carga na qual a corrente está atrasada em relação à tensão. Decorre que uma carga na qual a corrente está adiantada em relação à tensão ( $\psi$  negativo) a potência reativa será negativa.

## 5. CIRCUITOS ELEMENTARES COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

### 5.1 Resistência Pura

Suponhamos aplicar a uma resistência,  $R$ , constante, uma tensão alternada senoidal de valor máximo  $V_M$  e frequência  $f$ . É óbvio que em cada instante deverá ser satisfeita a lei de Ohm, isto é:

$$v_{(t)} = R i_{(t)}$$

ou seja:

$$i_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{R} = \frac{V_M}{R} \text{sen} \omega t$$

verificando-se que a corrente que percorre a resistência está em fase com a tensão de alimentação e que seu valor máximo está relacionado com o da tensão pelo valor da resistência.

Na notação simbólica tem-se, empregando valores eficazes, e supondo a tensão com fase nula:

$$\dot{V} = V / 0$$

Logo:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{V}{R} / 0 = I / 0$$

A figura 5.1 mostra um circuito resistivo e o correspondente diagrama com os fasores de tensão e corrente.

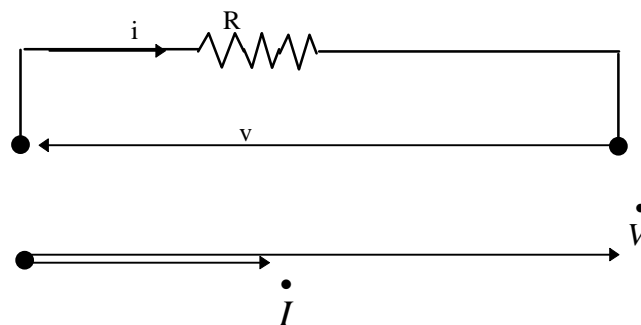


Figura 5.1 - Circuito Resistivo e seu Diagrama Fasorial

A potência instantânea absorvida pela resistência é dada por:

$$p_{(t)} = i^2 R = v_{(t)} i_{(t)} = \frac{v_{(t)}^2}{R}$$

A potência ativa ou real é dada por:

$$P = VI = RI^2 = V^2 / R$$

O fator de potência ( $\cos\psi$ ) é unitário, a potência reativa (Q) é nula e a potência aparente coincide com a ativa.

Verifica-se, pois, que todas as relações entre valores eficazes coincidem com os valores que seriam obtidos alimentando-se a resistência  $R$  com tensão contínua de valor  $V$ . A expressão da lei de Joule nos permite, portanto, interpretar o valor eficaz de uma corrente como sendo:

*“O valor eficaz de uma corrente alternada é igual ao valor de uma corrente contínua que atravessando a mesma resistência produz igual quantidade de calor no mesmo intervalo de tempo”.*

Salienta-se que esta conclusão obtida para grandezas senoidais é válida para grandezas alternativas quaisquer.

---

Exemplo 5.1 - Aplica-se a uma resistência de  $20\Omega$  tensão senoidal de valor eficaz 100V e frequência de 60 Hz. Pede-se:

- a) O valor eficaz da intensidade de corrente na resistência.
- b) A potência dissipada na resistência.
- c) O valor instantâneo da corrente e da tensão.

Adotando-se a tensão com fase inicial nula resulta:

$$\dot{V} = V/\underline{0} = V + 0j = 100/\underline{0} = 100 + 0j$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{100}{50} = 5 + 0j$$

donde:

$$I = |\dot{I}| = 5A$$

A potência dissipada na resistência vale

$$P = RI^2 = 20 \cdot 5^2 = 500W.$$

O valor instantâneo da corrente é dado por:

$$i = I_M \text{sen} \omega t$$

em que:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 \cong 377 \text{rd} / \text{seg}$$

$$V_M = \sqrt{2} V = \sqrt{2} \cdot 100 = 141,42V$$

$$I_M = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \cdot 5 = 7,071A$$

logo:

$$i = 7,071 \text{sen} 377t$$

$$v = 141,42 \text{sen} 377t$$

## 5.2 Indutância Pura

Aplicando-se uma tensão senoidal de frequência  $f$  e de valor eficaz  $V$  a uma bobina de indutância  $L$  e resistência ôhmica nula ter-se-á a circulação, pela indutância, de uma corrente de valor instantâneo  $i$  que irá criar uma f.e.m. dada por:

$$e_{(t)} = -L \frac{di_{(t)}}{dt}$$

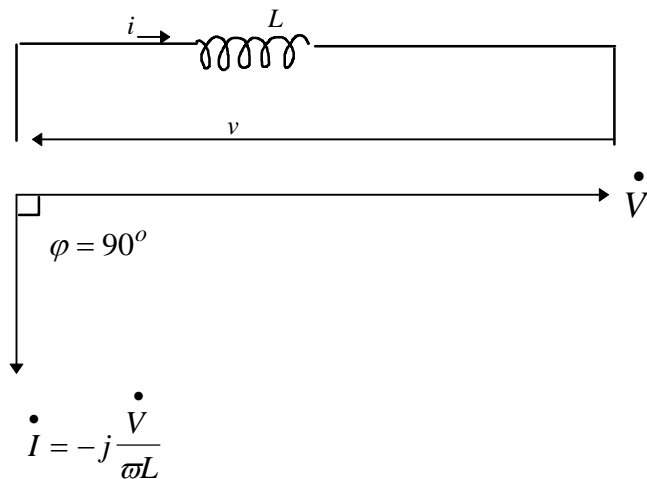


Figura 5.2 - Circuito Indutivo com Excitação Senoidal

Por outro lado, devemos ter:

$$v_{(t)} + e_{(t)} = 0,$$

isto é:

$$v_{(t)} = -e_{(t)} = L \frac{di_{(t)}}{dt}.$$

Sendo:

$$v_{(t)} = V_M \text{sen} \omega t,$$

resulta, imediatamente:

$$i_{(t)} = \frac{V_M}{\omega L} \text{sen}(\omega t - \pi / 2) \quad (5.1)$$

A Eq. (5.1) mostra que a corrente numa indutância está atrasada de  $\pi/2$  radianos em relação à tensão aplicada e seu valor máximo é obtido dividindo-se o valor máximo da tensão por  $\omega L$  que é designado por “reatância indutiva”, sendo representada por  $X_L$  e com a dimensão de uma resistência ( $\text{H} \cdot \text{rd/seg} = \text{Ohm} \cdot \text{seg} \cdot \text{rd/seg} = \text{Ohms}$ ).

No método simbólico, leva-se em conta a rotação de fase da corrente representando-se a indutância por uma “impedância” que é dada por um número complexo no qual a parte imaginária é a reatância da bobina. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = -j \frac{\dot{V}}{X_L} \quad (5.2)$$

sendo:

$$\dot{V} = V/0$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_L} / -\pi/2$$

Assim, numa indutância, a tensão e a corrente estão em quadratura e o fator de potência correspondente é dado por:

$$\cos \varphi = \cos \pi/2 = 0$$

A potência ativa é nula e a reativa que coincide com a aparente, é positiva e vale:

$$Q = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = S$$

Notamos que a indutância, quando ligada a uma fonte de corrente alternada, é percorrida por uma corrente sem que haja uma dissipação de energia. A presente situação é a que foi ilustrada na fig. 4.2b na qual se observa que durante o intervalo de tempo que vai desde  $T/4$  até  $T/2$ , a fonte de tensão fornece à indutância energia, cujo valor médio, nesse intervalo, é dado por  $2VI/\pi$ . No intervalo de tempo  $T/2$  a  $3T/2$ , a indutância absorve a mesma quantidade de energia porém com o sinal negativo, isto é, devolve a energia recebida. O princípio de funcionamento pode ser facilmente entendido lembrando-se que, numa indutância percorrida por corrente  $i$ , tem-se armazenamento, no campo magnético, de uma quantidade de energia dada por:

$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

e sendo a corrente variável periodicamente de 0 a  $+I_M$ , a energia fornecida à indutância variará de 0 a  $LI_M^2/2$  sendo que durante  $1/4$  de ciclo, essa energia é armazenada no campo magnético e durante o quarto seguinte, é devolvida.



Verificamos que a diferença básica entre uma indutância e uma resistência está em que a resistência transforma toda a energia que recebe em calor, ao passo que a indutância ora a armazena no campo magnético, ora a devolve ao sistema.

---

Exemplo 5.2 - Uma indutância de 0,08 H é alimentada com tensão senoidal de valor eficaz 240 V e 60 Hz. Pede-se:

- A intensidade de corrente na indutância.
- A potência ativa, aparente e reativa fornecidas à indutância.
- O valor instantâneo da corrente e tensão.

Resolução:

a) Determinação da corrente

Temos:

$$\dot{V} = (240 + j0)V \quad \text{e} \quad X_L = 2\pi fL = 30,16\Omega$$

logo:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = \frac{240 + 0j}{j30,16} = -j7,96 = 7,96 /_{-\pi/2} \text{ A}$$

$$I = |\dot{I}| = 7,96A$$

b) Determinação da potência

Temos:

$$P = VI \cos \psi = 240 \times 7,96 \times 0 = 0W$$

$$S = VI = 240 \times 7,96 = 1910,4VA$$

$$Q = VI \sin \psi = 240 \times 7,96 \times 1 = 1910,4VAR$$

c) Valores instantâneos

Temos:

$$V_M = \sqrt{2} V = \sqrt{2} \cdot 240 = 339,41V$$

$$I_M = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \cdot 7,96 = 11,26A$$

logo:

$$v = 339,4 \text{sen} 337t \quad (\text{V})$$

$$i = 11,26 \text{sen} \left( 337t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A})$$

### 5.3 Capacidade Pura

Um capacitor de capacidade  $C$ , alimentado por uma tensão senoidal de valor eficaz  $V$  e frequência  $f$ , em regime terá a carga  $q$ , dada por:

$$q_{(t)} = Cv_{(t)} = CV_M \text{sen} \omega t$$

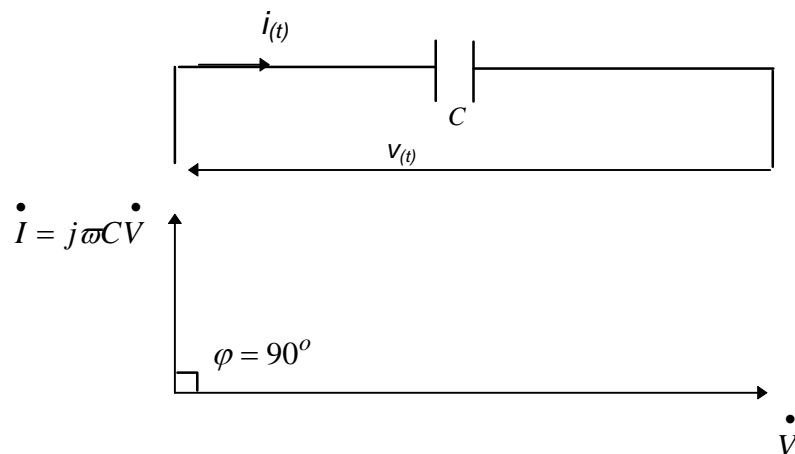


Figura 5.3 - Circuito Capacitivo com Excitação Senoidal

Portanto, será percorrido por corrente (por indução eletrostática) dada por:

$$i_{(t)} = \frac{dq_{(t)}}{dt} = C \frac{dv_{(t)}}{dt} = \omega CV_M \text{sen}(\omega t + \pi / 2)$$

Verificamos que a corrente num capacitor está adiantada de  $\pi/2$  radianos em relação à tensão e seu valor eficaz é obtido multiplicando-se o valor correspondente da tensão por  $\omega C$ . Analogamente, a quanto feito com uma indutância, o termo:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

é chamado de “reatância” do capacitor ou de reatância capacitiva. A unidade da reatância capacitiva também é “Ohm”.

Na notação simbólica, a “impedância” de um capacitor será representada por um número complexo no qual a parte real será nula e a parte imaginária será  $-jX_C$ . Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{-jX_C} = j \frac{\dot{V}}{X_C}$$

sendo:

$$\dot{V} = V \underline{0}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_C} / \pi / 2$$

Assim, o fator de potência de um capacitor é dado por:

$$\cos \psi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

A potência ativa absorvida é nula enquanto que a aparente e a reativa coincidem em módulo e valem:

$$S = VI$$

$$Q = VI \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -VI = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega CV^2$$

As considerações energéticas feitas com relação a uma indutância aplicam-se aos capacitores, lembrando unicamente que, neste caso, a energia é armazenada no capacitor sob a forma de energia eletrostática e vale:

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

Frisamos ainda que, num capacitor, não existe circulação de corrente pelo dielétrico, isto é, há uma circulação de corrente por indução eletrostática de carga entre as placas.

---

Exemplo 5.3 - Determinar a intensidade de corrente num circuito formado por um capacitor de  $10\mu\text{F}$  ligado a uma fonte de  $120\text{ V}$  e  $60\text{ Hz}$ .

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 265,26\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{120}{-jX_C} = \frac{120}{265,26} j = j0,452\text{ A}$$


---

#### 5.4 Circuito com Elementos em Série

Dado o circuito da fig. 5.4, constituído pela associação em série de uma indutância, uma capacidade e uma resistência, alimentado por uma tensão senoidal de valor eficaz  $V$  e frequência  $f$  deseja-se calcular a corrente e as quedas de tensão nos três elementos.

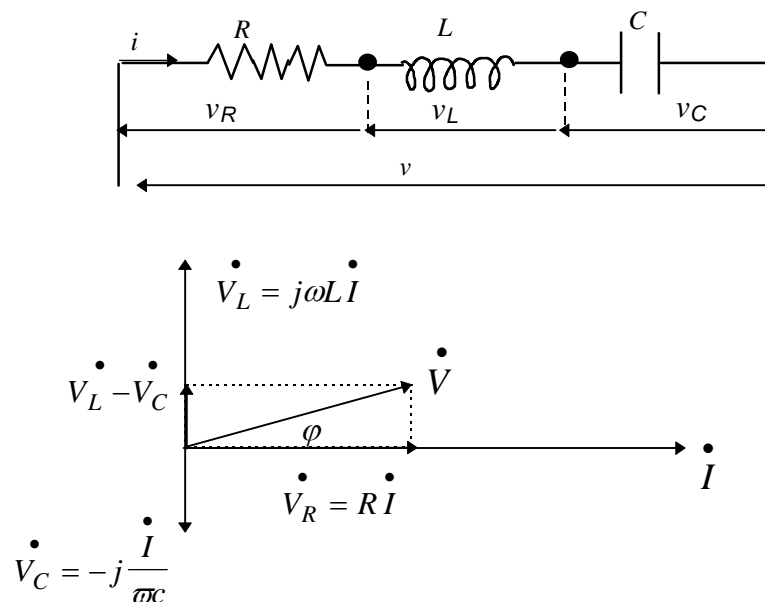


Figura 5.4 - Associação RLC série

Notamos que, estando os elementos em série, a corrente que circula, evidentemente, será a mesma para os três, portanto, poderemos adotar:

$$\dot{I} = I/\underline{0} = I(1+0j)$$

De quanto visto nos itens anteriores, a queda de tensão em cada um dos elementos será dada por:

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = IR/\underline{0}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I}(jX_L) = IX_L/\underline{\pi/2}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I}(-jX_C) = IX_C/\underline{-\pi/2}$$

É claro que, em cada instante, a tensão aplicada deverá igualar a soma das quedas de tensão. Portanto, essa relação deve também valer para os fasores correspondentes:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{I}[R + j(X_L - X_C)] \quad (5.6)$$

Definimos “operador impedância” ao número complexo que, multiplicado pelo fasor da corrente no ramo do circuito, nos dá o fasor da tensão aplicada ao mesmo. A impedância do circuito,  $\bar{Z}$ , ora analisado, é:

$$\bar{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C)$$

Em particular, para os elementos individuais, isto é, uma resistência, uma indutância e uma capacidade, a impedância é dada por:

$$\dot{Z}_R = R + 0j = R/\underline{0}$$

$$\dot{Z}_L = 0 + jX_L = X_L/\underline{\pi/2}$$

$$\dot{Z}_C = 0 - jX_C = X_C/\underline{-\pi/2}$$

Passando a impedância  $\bar{Z}$  para a forma trigonométrica (módulo Z e fase  $\theta$ ), teremos:

$$\underline{\bar{Z}} = Z(\cos\theta + j\text{sen}\theta) = Z \angle \theta = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V \angle 0}{I \angle -\varphi} = VI \angle \varphi$$

Notamos que o ângulo de defasagem entre tensão e corrente,  $\varphi$ , em tela, coincide com o argumento da impedância, e o fator de potência pode ser avaliado por:

$$\cos\psi = \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z} \quad (5.7)$$

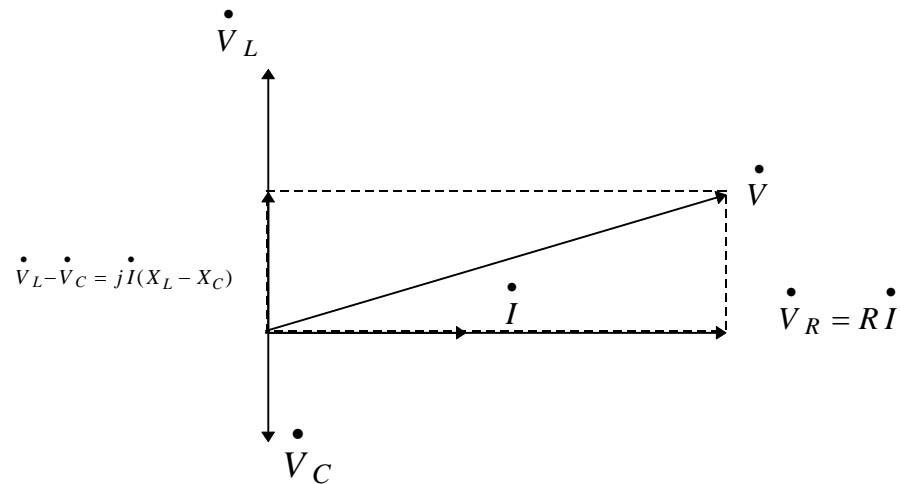
Para a construção do diagrama de fasores, figura 5.5, supõe-se conhecida a intensidade de corrente; portanto, conforme já vimos, a queda de tensão na resistência será representada por um fasor em fase com a corrente e de módulo igual a  $IR$ . Na indutância, o será por um fasor em quadratura e adiantado sobre a corrente e de módulo  $IX_L = 2\pi fLI$ . Finalmente, no capacitor, a queda de tensão será dada por um fasor em quadratura e atrasado sobre a corrente e de módulo  $IX_C = I/(2\pi f C)$ . A tensão aplicada será obtida somando-se vetorialmente os três fasores. Como  $\dot{V}_L$  e  $\dot{V}_C$  estão em posição de fase, sua soma equivalerá à soma algébrica de seus módulos, isto é:

$$\dot{V}_L - \dot{V}_C = \dot{I}(X_L - X_C)j$$

Para a determinação gráfica de todas as incógnitas, observamos que os fasores  $\dot{V}$ ,  $\dot{V}_R$ , e  $(\dot{V}_L - \dot{V}_C)$  formam um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é representada pelo fasor  $\dot{V}$ .

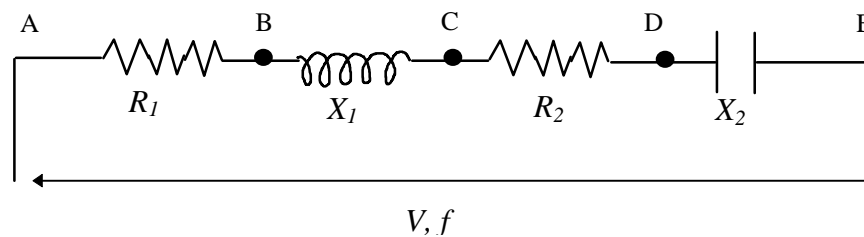
Quanto à potência ativa, observamos que:

$$P = VI \cos\varphi = (IZ) \cdot I \cdot \frac{R}{Z} = I^2 R \quad (5.8)$$



**Figura 5.5 - Diagrama de Fasores para Circuito R-L-C Série**

Exemplo 5.4 - Resolver o circuito da figura 5.6



**Figura 5.6 - Circuito para exemplo 5.4**

em que:

$$V = 220V \text{ (eficaz)}$$

$$R_1 = 4\Omega \quad R_2 = 8\Omega$$

$$f = 60Hz$$

$$L = 13,26mH \quad C = 294,7\mu F$$

a) Cálculo da impedância

Sendo  $Z = Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CD} + Z_{DE}$ , resulta:

$$Z_{AB} = (4 + 0j)\Omega$$

$$Z_{CD} = (8 + 0j)\Omega$$

$$Z_{BC} = 2\pi 60 \cdot 0,013226 = j5\Omega$$

$$Z_{DE} = -j \frac{1}{2\pi \cdot 294,7 \cdot 10^{-6}} = -j9\Omega$$

$$Z = 12 - j4 \Omega$$

b) Cálculo da corrente

Adotando-se  $\dot{V} = 220 + 0j$ , resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{220}{12 - j4} = \frac{220}{12,65 / -18,43^\circ} = 17,39 / 18,43^\circ \text{ A} = (16,5 + j5,5) \text{ A}$$

c) Cálculo das tensões

$$\dot{V}_{AB} = Z_{AB} \dot{I} = 4 \cdot (16,5 + j5,5) = 66 + j22 = 69,57 / 18,43^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = Z_{BC} \dot{I} = 5j \cdot (16,5 + j5,5) = 82,5j - 27,5 = 86,96 / 108,43^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CD} = Z_{CD} \dot{I} = 8 \cdot (16,5 + j5,5) = 132 + j44 = 139,14 / 18,43^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{DE} = Z_{DE} \dot{I} = -9j \cdot (16,5 + j5,5) = -148,5j + 49,5 = 156,53 / -71,56^\circ \text{ V}$$

Verificação:

$$\dot{V}_{AE} = \dot{V}_{AB} + \dot{V}_{BC} + \dot{V}_{CD} + \dot{V}_{DE} = (220 + j0) \text{ V}$$

O resultado é ilustrado no diagrama de fasores da figura 5.7.

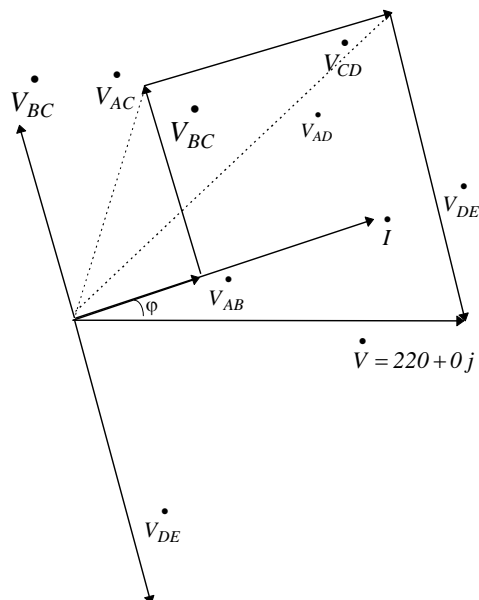


Figura 5.7 - Diagrama de Fasores

## 6. RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA



### 6.1 Princípios Gerais

De tudo quanto exposto, resulta evidente que a lei de Ohm é válida desde que se empregue a notação simbólica e se substitua a resistência pela impedância, isto é, a lei de Ohm deverá ser posta na forma:

$$\dot{V} = \dot{I} \bar{Z}$$

que evidentemente poderá ser generalizada para um circuito contendo impedâncias, e f.e.m.,  $E_i$ , em série, sob a forma:

$$\dot{V} = \sum \dot{E}_i - \dot{I} \sum \bar{Z}_i$$

Analogamente, as leis de Kirchhoff são expressas por:

Lei de nós: 
$$\sum \dot{I}_i = 0$$

Lei das malhas: 
$$\sum \dot{E}_i = \sum \dot{I}_i \bar{Z}_i$$

Salientamos que, desde que se opere com os fasores de tensões e correntes e com as impedâncias, são válidas todas as proposições aplicáveis para corrente contínua (método das correntes fictícias de Maxwell, gerador equivalente de Thevenin, princípio de superposição de efeitos, transformação estrela-triângulo, etc).

Define-se admitância ao operador  $\bar{Y}$ , que representa o inverso da impedância, isto é:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

Sendo:

$$\bar{Z} = R + jX$$

resulta:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} \quad (5.9)$$

Da Eq.(5.9) define-se “condutância” e “susceptância” como sendo, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da admitância, isto é:

$$G = \frac{R}{Z^2} \quad B = -\frac{X}{Z^2}$$

Representando-se a impedância e a admitância na forma trigonométrica:

$$\bar{Z} = Z / \underline{\varphi} \quad \bar{Y} = Y / \underline{\theta}$$

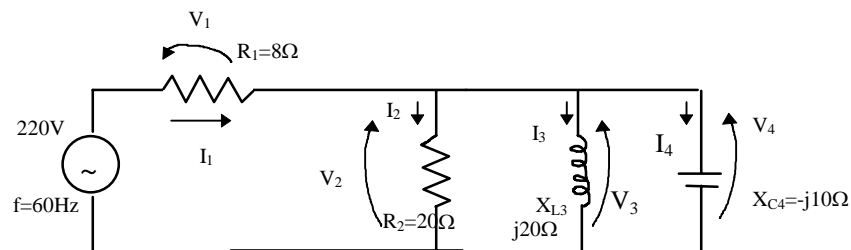
resulta:

$$\bar{Y} = Y / \underline{\theta} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Z / \underline{\varphi}} = \frac{1}{Z} / \underline{-\varphi}$$

donde:

$$\frac{1}{Z} = Y \quad \theta = -\varphi$$

Exemplo 6.1: Resolva o circuito da figura 6.1.



**Figura 6.1 - Circuito para o Ex. 6.1**

Cada elemento do circuito da figura 6.1 pode ser encarado como um bipolo com impedâncias:

$$Z_1 = R_1 = 8\Omega$$

$$Z_2 = R_2 = 20\Omega$$

$$Z_3 = j20\Omega$$

$$Z_4 = -j10\Omega$$

Assim sendo, a impedância total vista pelo gerador pode ser dada por:

$$Z = Z_1 + Z_{2,3,4} = Z_1 + Z_2 // Z_3 // Z_4$$

onde o símbolo // significa “paralelo”. Por analogia de circuitos C.C., temos que:

$$\frac{1}{Z_2 // Z_3 // Z_4} = Y_{2,3,4} = Y_2 + Y_3 + Y_4 = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{20} = \frac{1}{j20} = \frac{1}{-j10}$$

$$Y_{2,3,4} = 0,05 - j0,05 + j0,1 = 0,05 + j0,05 = 0,07071 / 45^\circ S$$

$$e \quad Z_{2,3,4} = \frac{1}{Y_{2,3,4}} = 14,1242 / -45^\circ \Omega$$

$$e \quad Z = Z_1 + Z_{2,3,4} = 8 + 14,1242 / -45^\circ \Omega = 18 - 10j10 = 20,591 / -29,05^\circ \Omega$$

logo:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{220 / 0^\circ}{20,591 / -29,05^\circ} = 10,684 / 29,05^\circ A \Rightarrow \dot{V}_1 = R_1 \dot{I}_1 = \\ &= 8 \times 10,68 / 29,05^\circ = 85,47 / 29,05^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= 220 - \dot{V}_1 = 220 - 85,47 / 29,05^\circ = 145,28 - j41,50 = 151,09 / -15,94^\circ V \\ & (= \dot{V}_3 = \dot{V}_4) \end{aligned}$$

e:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{R_2} = \frac{151,09 / -15,94^\circ}{20} = 7,5545 / -15,94^\circ A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_2}{j20} = \frac{151,09 / -15,94^\circ}{20 / 90^\circ} = 7,5545 / -105,94^\circ A$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_2}{-j10} = \frac{151,09 / -15,94^\circ}{10 / -90^\circ} = 15,109 / 74,06^\circ \text{ A}$$

Verificação: aplicando-se a 1ª Lei de Kirchhoff, temos:

$$\dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 9,339 + j5,189 = 10,684 / 29,05^\circ \text{ A} = \dot{I}_1$$

Podemos também determinar as potências complexas (ativa, reativa e aparente) em cada bipolo:

$$\text{Bipolo 1: } \bar{S}_1 = \dot{V}_1 \dot{I}_1^* = 85,47 / 29,05^\circ \times 10,684 / -29,05^\circ = (913,16 + j0) \text{ VA}$$

$$\text{Bipolo 2: } \bar{S}_2 = \dot{V}_2 \dot{I}_2^* = 151,09 / -15,94^\circ \times 7,5545 / 15,94^\circ = (1141,41 + j0) \text{ VA}$$

$$\text{Bipolo 3: } \bar{S}_3 = \dot{V}_3 \dot{I}_3^* = 151,09 / -15,94^\circ \times 7,5545 / +105,94^\circ = (0 + j1141,41) \text{ VA}$$

$$\text{Bipolo 4: } \bar{S}_4 = \dot{V}_4 \dot{I}_4^* = 151,09 / -15,94^\circ \times 15,109 / -74,06^\circ = (0 - j2282,82) \text{ VA}$$

A potência complexa fornecida pelo gerador pode também ser avaliada por:

$$\bar{S}_G = \dot{V}_G \dot{I}_1^* = 220 / 0^\circ \times 10,68 / -29,05^\circ = 2350,48 / -29,05^\circ = (2054,8 - j1141,4) \text{ VA}$$

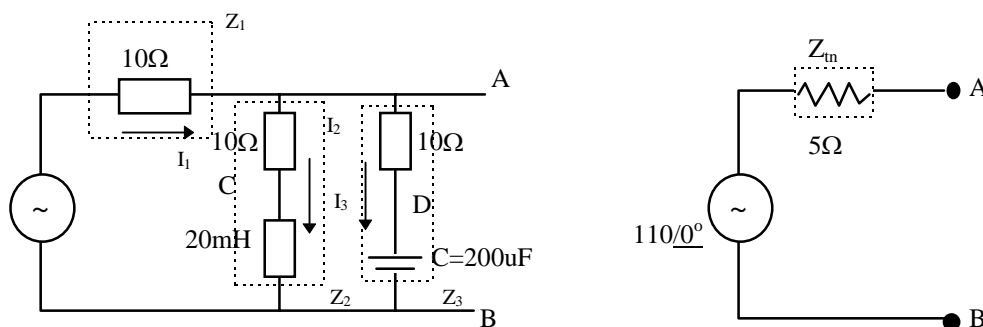
Verificação: o princípio da conservação de energia também é válido para corrente alternada. A potência complexa fornecida pelo gerador deve ser igual àquela absorvida pelos elementos passivos. Isto equivale a dizer que a potência ativa (ou reativa) absorvida:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4 &= (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + j(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) \\ &= (913,16 + 1141,41 + 0 + 0) + j(0 + 0 + 1141,41 - 2282,81) \\ &= (2054,6 - 1141,41) \text{ VA} \\ &= (\cong P_G + jQ_G = \bar{S}_G!) \end{aligned}$$

**Exemplo 6.2**

Para o circuito da figura 6.2, que é alimentado por gerador ideal de tensão com  $v(t)=220\sqrt{2}\text{sen}377t$ , pede-se:

- circuito equivalente de Thevenin visto dos pontos A e B.
- A corrente que flui entre A e B quando;
  - ocorre um curto-circuito entre os terminais A e B.
  - o circuito alimenta carga de  $20\Omega$ .
- Os fasores das correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  e o fasor da tensão entre os pontos C e D quando os terminais A e B estão em aberto.
- As potências ativa e reativa absorvidas pela carga do item b.2 ( $20\Omega$  entre A e B) e, nessa condição, as potências ativa e reativa fornecidas pelo gerador.



a) Circuito para o exemplo 2

b) Circuito equivalente de Thévenin

**Figura 6.2**

a) Circuito equivalente de Thévenin

Sendo  $Z_1 = 10\Omega$ ,  $Z_2 = 10 + j377 \times 20 \times 10^{-3} = (10 + j7,54)\Omega = 12,52/\underline{37^\circ}\Omega$  e

$Z_3 = 10 - j\frac{1}{377 \times 200 \times 10^{-6}} = (10 - j13,26)\Omega = 16,61/\underline{-53^\circ}\Omega$ , temos que:

$$Z_{2,3} = Z_2 // Z_3 = \frac{12,52/\underline{37^\circ} \times 16,61/\underline{-53^\circ}}{10 + j7,54 + 10 - j13,26} = 10 - j0 = 10/\underline{0^\circ}\Omega$$

Portanto, a tensão  $V_{AB}$ , com os terminais em vazio vale:

$$\dot{V}_{th} = \dot{V}_{AB} = \dot{I}_1 Z_{2,3} = \frac{\dot{V}}{Z_1 + Z_{2,3}} Z_{2,3} = \frac{220/0^\circ}{10+10} 10 = 11/0^\circ \cdot 10 = 110/0^\circ \text{ V}$$

Para a determinação da impedância de Thévenin, basta curto-circuitar o gerador de tensão e portanto:

$$Z_{th} = Z_{2,3} // Z_1 = \frac{10 \cdot 10}{10+10} = 5\Omega$$

b.1 - 
$$\dot{I}_{CC} = \frac{\dot{V}_{th}}{Z_{th}} = \frac{110/0^\circ}{5} = 22/0^\circ \text{ A}$$

b.2 - 
$$\dot{I}_{AB} = \frac{110}{5+20} = \frac{110}{25} = 4,4/0^\circ \text{ A}$$

c) do item a) vimos que  $\dot{I}_1 = 11/0^\circ \text{ A}$  e  $\dot{V}_{AB} = 101/0^\circ \text{ V}$ . Logo:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{AB}}{Z_2} = \frac{110}{12,52/37^\circ} = 8,79/-37^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_{AB}}{Z_3} = \frac{110}{16,61/-53^\circ} = 6,62/+53^\circ \text{ A}$$

e

$$\dot{V}_{R2} = 10 \cdot \dot{I}_2 = 87,9/-37^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{R3} = 10 \cdot \dot{I}_3 = 66,2/53^\circ \text{ V}$$

A d.d.p. entre os pontos C e D,  $\dot{V}_{CD}$ , pode ser calculada por:

$$\dot{V}_{CD} = \dot{V}_{R3} - \dot{V}_{R2} = 66,2/53^\circ - 87,9/-37^\circ = 110/164^\circ \text{ V}$$

d) Carga de  $R=20\Omega$ :  $\dot{I}_{AB} = 4,4 \text{ A} \Rightarrow P = R \cdot I_{AB}^2 = 20 \times 4,4^2 = 387,2 \text{ W}$  e  $Q = 0$

Temos que, nesta condição,  $\dot{V}_{AB} = R \cdot \dot{I}_{AB} = 20 \cdot 4,4 = 88/0^\circ V$ . Logo:

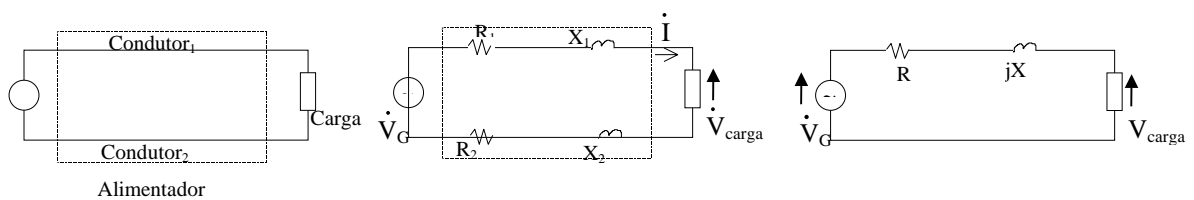
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_G - \dot{V}_{AB}}{R_1} = \frac{220 - 88}{10} = 13,2/0^\circ A$$

e

$$\begin{aligned}\bar{S}_G &= \dot{V} \cdot \dot{I}_1^* = 220/0^\circ \times 13,2/0^\circ = (2904 + j0)VA, \text{ ou seja} \\ P_G &= 2904W \\ Q_G &= 0VAr\end{aligned}$$

## 6.2 Queda de Tensão em Alimentadores

Um alimentador monofásico pode ser construído ligando-se uma fonte de tensão à uma carga (por exemplo, uma indústria) através de dois fios condutores. Cada condutor possui uma resistência e indutância própria, conforme esquema e circuito da figura 6.3.



a) Diagrama

b) Circuito equivalente

c) Impedância total da linha

**Figura 6.3**

A queda de tensão ( $\Delta \dot{V}$ ) é definida como sendo a diferença entre a tensão da fonte ( $\dot{V}_G$ ) e a tensão da carga ( $\dot{V}_{carga}$ ):

$$\begin{aligned}\Delta \dot{V} &= \dot{V}_G - \dot{V}_{carga} = (R_1 + jX_1) \dot{I} + (R_2 + jX_2) \dot{I} \\ &= [(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)] \dot{I} = (R + jX) \dot{I}\end{aligned}$$

e sendo os dois condutores iguais:  $R = 2 R_1$ , e  $X = 2 X_1$ . Conhecendo-se a impedância de cada condutor por comprimento ( $r_1 + jx_1$ ), em  $\Omega/\text{km}$ , pode-se avaliar  $R + jX = 2 \cdot l \cdot (r_1 + jx_1)$  onde  $l$  é o comprimento total de cada condutor.

**Exemplo 6.3**

Suponha que, numa residência, a distância entre o quadro de distribuição de luz e a tomada de um chuveiro elétrico é de 10m. Suponha também que o chuveiro absorve 4000W com tensão de 220V. Considere os condutores com fio 2,5mm<sup>2</sup> com resistência  $r=0,007\Omega/m$  e reatância  $x=0,0001\Omega/m$ . Determine a queda de tensão do alimentador:

Resolução:

Considerando  $\dot{V}_{carga} = 220/0^\circ V$  e sendo  $P_{carga} = V_{carga} I_{carga} \cos \varphi_{carga}$  e  $\cos \varphi_{carga} = 1$  (chuveiro é composto somente por resistência), temos:

$$\left| \dot{I}_{carga} \right| = \frac{4000}{220.1} = 18,18A \quad e$$

$$\dot{I}_{carga} = 18,18/0^\circ$$

logo:

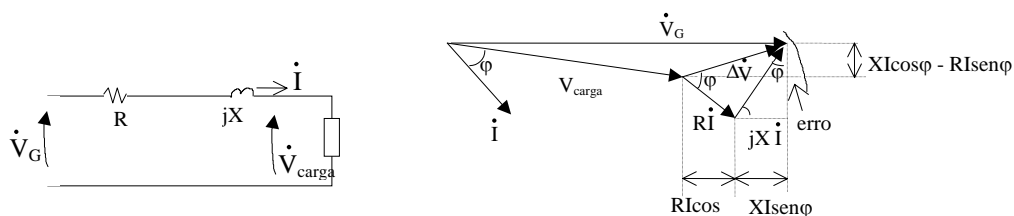
$$\Delta \dot{V} = (r + jx)2\lambda \dot{I}_{carga}$$

$$\Delta \dot{V} = (0,007 + j0,0001).2.10.18,18 = 2,54/0,82^\circ V$$

ou seja, o módulo da queda de tensão é de 2,54V e seu o valor percentual vale:

$$\Delta V_{\%} = \frac{2,54}{220} \times 100\% = 1,15\%$$

Em geral, pode-se desprezar a parte imaginária da queda de tensão para efeito de cálculo de queda de tensão. Seja o diagrama de fasores do circuito da figura 6.4, onde assumimos um fator de potência da carga indutiva ( $\cos \varphi$ ) conhecido e a tensão na carga com fase nula.





**Figura 6.4**

Temos que:

$$\begin{aligned}\dot{V}_G &= \dot{V}_{carga} + (R + jX)I / \underline{-\varphi} \\ &= V_{carga} / \underline{0^\circ} + (R + jX)I(\cos\varphi - j\text{sen}\varphi) \\ \dot{V}_G &= (V_{carga} + RI \cos\varphi + XI \text{sen}\varphi) + j(XI \cos\varphi - RI \text{sen}\varphi)\end{aligned}$$

Observa-se que, para a obtenção de  $\dot{V}_G$  a partir de  $\dot{V}_{carga}$  temos que a parte imaginária é realmente desprezível para nossas aplicações em instalações:

$$XI \cos\varphi - RI \text{sen}\varphi \ll V_{carga} + RI \cos\varphi + XI \text{sen}\varphi$$

Portanto, adotamos a queda de tensão como sendo:

$$\Delta V = V_G - V_{carga} = RI \cos\varphi + XI \text{sen}\varphi = I(R \cos\varphi + X \text{sen}\varphi)$$

Notamos que, para o exemplo 6.3, o cálculo de tensão, com a aproximação feita, incorreria em nenhum erro:

$$\begin{aligned}\Delta V &= RI \cos\varphi + XI \text{sen}\varphi = \\ \Delta V &= 0,007 \times 2 \times 10 \times 18,18 \times 1 + 0 \\ \Delta V &= 2,54V\end{aligned}$$

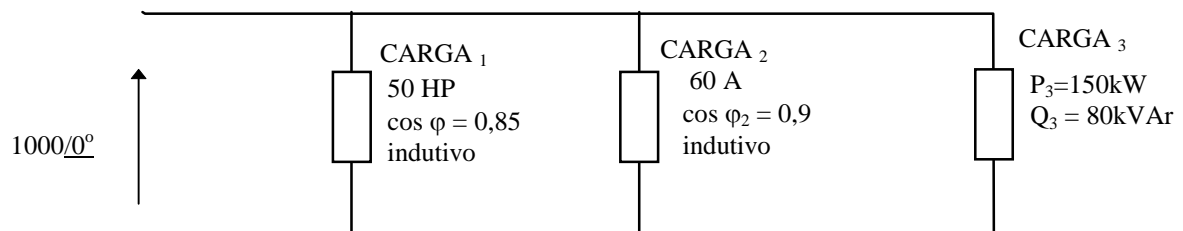
**Exemplo 6.4**

Uma indústria é alimentada com tensão de 1000V (eficazes) e frequência de 60Hz. A indústria conta com três tipos de carga, quais sejam:

- i) Motores de indução, potência total de 50HP (1HP=746W), fator de potência 0,85 indutivo.
- ii) Iluminação, corrente absorvida de 60A, fator de potência 0,9 indutivo.
- iii) Fornos, potência ativa de 150kW e potência reativa de 80kVAr.

Pede-se:

- a) as potências ativa, reativa e complexa e o fator de potência de cada carga e do conjunto.
- b) qual seria o valor mensal gasto pela indústria pelo consumo de energia elétrica por mês, supondo que as cargas ficassem permanentemente ligadas e que o valor do custo da energia é de 60 US\$/MWh ? A indústria receberia multa pelo fator de potência estar abaixo de 0,92 ?
- c) as correntes absorvidas em cada carga e pelo conjunto, e o diagrama de fasores da tensão e correntes.
- d) determinar a queda de tensão e as perdas elétricas em potência ativa de um alimentador que supre as cargas acima, e que apresenta resistência elétrica de  $0,1\Omega$  e reatância indutiva de  $0,05\Omega$ .



**Figura 6.5 - Circuito para o Ex. 6.4**

a) Carga 1:

$$P_1 = 50 \times 746W = 37300W \text{ (assumindo-se rendimento da carga = 100\%)}$$

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos \varphi_1} = 43882VA \Rightarrow Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = 23118VAr$$

Carga 2:

$$P_2 = 60 \times 1000 \times \cos \varphi_2 = 54000W$$

$$S_2 = VI_2 = 60000VA \Rightarrow Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = 26153VAr$$

Carga 3:

$$P_3 = 150000W \quad Q_3 = 80000VAr$$

$$\Rightarrow S_3 = \sqrt{P_3^2 - Q_3^2} = 170000VA = 170kVA$$

Total:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 + P_3 = 241300W = 241,3kW$$

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 129271VAr = 129,271kVAr$$

$$\varphi_{tot} = \arctg \frac{Q_{tot}}{P_{tot}} = 28,18^\circ \Rightarrow \cos \varphi_{tot} = 0,8815$$

b)

$$\varepsilon_{tot} = P_{tot} \times T_{mês} = 241,3kW \times 720h = 173.736kWh / mês$$

$$Custo = 173,736MWh / mês \cdot 60US\$ / MWh = 10.424,16US\$ / mês$$

O  $\cos \varphi_{tot}$  é igual a 0,8815, menor que 0,92. Portanto a indústria pagaria multa.

c) carga 1:

$$\bar{S}_1 = \dot{V} \dot{I}_1^* \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{S}_1^*}{\dot{V}} = \frac{P_1 - jQ_1}{\dot{V}} = \frac{S_1 / -\varphi_1}{V / 0^\circ} = \frac{43882}{1000} / -32^\circ = 43,88 / -32^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{P_2 - jQ_2}{\dot{V}} = \frac{S_2 / -\varphi_2}{1000} = \frac{60000}{1000} / -25,8^\circ = 60 / -25,8^\circ A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{S_3 / -\varphi_3}{1000} = \frac{170000}{1000} / -28,2^\circ = 170 / -28,2^\circ \text{ A}$$

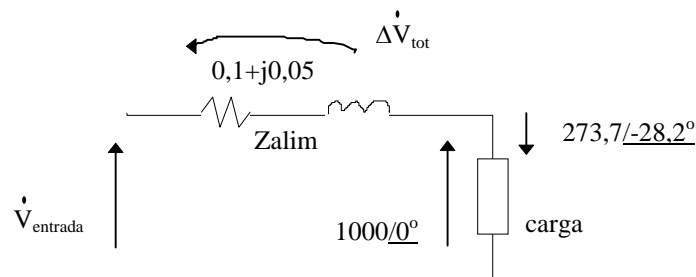
logo:

$$\dot{I}_{tot} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 241,0 - j129,7 = 273,7 / -28,3^\circ \text{ A}.$$

Alternativamente, poderíamos calcular  $\dot{I}_{tot}$  a partir da potência complexa total, calculada no item a):

$$\dot{I}_{tot} = \frac{S_{tot} / -\varphi_{tot}}{V^*} = \frac{\sqrt{241,3^2 + 129,271^2}}{1000} \times 10^3 / -28,2^\circ = 273,7 / -28,2^\circ \text{ A}$$

d)



$$\Delta \dot{V}_{tot} = \dot{I}_{tot} Z_{a\lim} = 273,75 / -28,18^\circ (0,1 + j0,05) = 30,61 / -1,61^\circ \text{ V}$$

logo:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{entrada} &= \dot{V}_{tot} + 1000/\underline{0^0} = 30,61/\underline{-1,61^o} + 1000/\underline{0^o} \\ &= 30,6 - j0,86 + 1000 = 1030,6 - j0,86 \\ &= 1030,6/\underline{-0,05^oV}\end{aligned}$$

---

---