



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ENERGIA E
AUTOMAÇÃO ELÉTRICAS**

ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

PEA – LABORATÓRIO DE INSTALAÇÕES ELÉTRICAS

CIRCUITOS TRIFÁSICOS

Código: 3F

III - CIRCUITOS TRIFÁSICOS

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Preâmbulo | 1 |
| 1.2 Definições Gerais | 1 |
| 1.3 Obtenção de Sistemas Polifásicos - Seqüência de Fase | 2 |
| 1.4 Operador α | 4 |
| | |
| 2. SISTEMAS TRIFÁSICOS SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS | 5 |
| 2.1 Introdução | 5 |
| 2.2 Ligações em Estrela | 5 |
| 2.3 Relação entre os Valores de Linha e Fase para Ligação Estrela | 7 |
| 2.4 Resolução de Circuitos com Gerador e Carga em Estrela | 12 |
| 2.5 Ligações em Triângulo | 17 |
| 2.6 Relação entre os Valores de Fase e de Linha para a Ligação Triângulo | 18 |
| 2.7 Resolução de Circuitos Trifásicos em Triângulo | 21 |
| | |
| 3. POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS | 25 |
| 3.1 Introdução | 25 |
| 3.2 Expressão Geral da Potência em Sistemas Trifásicos | 28 |
| 3.3 Medida de Potência em Sistemas Polifásicos - Teorema de Blondel | 34 |
| | |
| 4. EXERCÍCIOS | 35 |

1. INTRODUÇÃO

1.1 Preâmbulo

As primeiras linhas de transmissão de energia elétrica surgiram no final do século XIX, e, inicialmente, destinavam-se exclusivamente ao suprimento de sistemas de iluminação. A utilização destes sistemas para o acionamento de motores elétricos fez com que as "companhias de luz" se transformassem em "companhias de força e luz". Estes sistemas operavam em baixa tensão e em corrente contínua, e foram rapidamente substituídos por linhas monofásicas em corrente alternada. Dentre os motivos que propiciaram essa mudança, podemos citar: (i) o uso dos transformadores, que possibilitou a transmissão de energia elétrica em níveis de tensão muito maiores do que aqueles utilizados na geração e na carga, reduzindo as perdas no sistema, permitindo a transmissão em longas distâncias; e (ii) o surgimento dos geradores e motores em corrente alternada, construtivamente mais simples e mais baratos que as máquinas em corrente contínua. Dentre os sistemas em corrente alternada, o trifásico tornou-se o mais conveniente, por razões técnicas e econômicas (como a transmissão de potência com menor custo e a utilização dos motores de indução trifásicos), e passou a ser o padrão para a geração, transmissão e distribuição de energia em corrente alternada. Por outro lado, as cargas ligadas aos sistemas trifásicos podem ser trifásicas ou monofásicas. As cargas trifásicas normalmente são equilibradas, ou seja, são constituídas por três impedâncias iguais, ligadas em estrela ou em triângulo. As cargas monofásicas, como por exemplo as cargas de instalações residenciais, por sua vez, podem introduzir desequilíbrios no sistema, resultando em cargas trifásicas equivalentes desequilibradas.

Neste texto vamos definir os sistemas polifásicos e estudar em particular os sistemas trifásicos. Inicialmente, vamos apresentar algumas definições importantes, que serão utilizadas ao longo de todo o texto. Em seguida iremos apresentar métodos de cálculo para a análise de circuitos trifásicos alimentando cargas trifásicas equilibradas, ligadas através das duas formas possíveis, em estrela e em triângulo. Em continuação, iremos estudar potência em sistemas trifásicos. Definiremos os conceitos de potência ativa, reativa e aparente, e métodos para a sua medição e análise.

1.2 Definições Gerais

Definimos como "sistema de tensões polifásico e simétrico" (a n fases) um sistema de tensões do tipo:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= E_M \cos \omega t \\
 e_2 &= E_M \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{1}{n} \right) \\
 e_3 &= E_M \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{2}{n} \right) \\
 &\dots\dots\dots \\
 e_n &= E_M \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{n-1}{n} \right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde n é um número inteiro qualquer não menor que três. Em particular, quando $n=3$, dizemos que o sistema é trifásico.

Da definição de sistema polifásico, observamos que tais sistemas são constituídos por um conjunto de n cossenóides de mesmo valor máximo, E_M , e com uma defasagem de $2\pi/n$ rad entre duas tensões sucessivas quaisquer.

As tensões e correntes nos sistemas trifásicos são representadas por fasores. Isto é, podemos representar o sistema trifásico:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= E_M \cos \omega t = \Re[E_M e^{j\omega t}] \\
 e_2 &= E_M \cos(\omega t - 2\pi/3) = \Re[E_M e^{-j2\pi/3} e^{j\omega t}] \\
 e_3 &= E_M \cos(\omega t - 4\pi/3) = E_M \cos(\omega t + 2\pi/3) = \Re[E_M e^{j2\pi/3} e^{j\omega t}]
 \end{aligned}$$

pelos fasores

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathcal{E}}_1 &= E + j0 = E \underline{0^\circ} \\
 \underline{\mathcal{E}}_2 &= E[\cos(-2\pi/3) + j \operatorname{sen}(-2\pi/3)] = E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E \underline{-120^\circ} \\
 \underline{\mathcal{E}}_3 &= E[\cos(+2\pi/3) + j \operatorname{sen}(+2\pi/3)] = E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E \underline{120^\circ}
 \end{aligned}$$

em que $E = E_M / \sqrt{2}$ representa o valor eficaz da tensão.

Ao longo deste texto iremos apresentar métodos para a solução de circuitos trifásicos em diversas condições, envolvendo as tensões no início do sistema (nos terminais dos geradores), as linhas utilizadas para a transmissão da energia até a carga, e a carga conectada no final da linha. Para tanto, definimos:

- (1-a) - Sistema de tensões trifásico simétrico: sistema trifásico em que as tensões nos terminais dos geradores são senoidais, de mesmo valor máximo, e defasadas entre si de $2\pi/3$ rad ou 120° elétricos;
- (1-b) - Sistema de tensões trifásico assimétrico: sistema trifásico em que as tensões nos terminais dos geradores não atendem a pelo menos uma das condições apresentadas em (1-a);
- (2-a) - Carga trifásica equilibrada: carga trifásica constituída por 3 impedâncias complexas iguais, ligadas em estrela ou em triângulo;
- (2-b) - Carga trifásica desequilibrada: carga trifásica na qual não se verifica a condição descrita em (2-a).

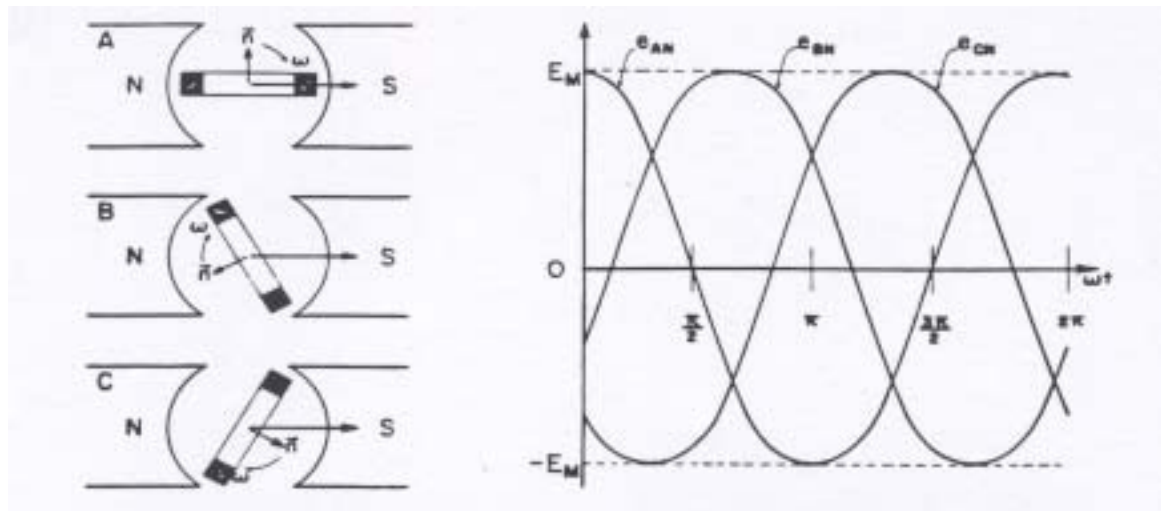
1.3 - Obtenção De Sistemas Polifásicos - Seqüência De Fase

Nos terminais de uma bobina que gira com velocidade angular constante, no interior de um campo magnético uniforme, surge uma tensão senoidal cuja expressão é

$$e = E_M \cos(\omega t + \theta),$$

em que θ representa o ângulo inicial da bobina. Ou melhor, adotando-se a origem dos tempos coincidente com a direção do vetor indução, θ representa o ângulo formado pela direção da bobina com a origem dos tempos no instante $t=0$.

Assim, é óbvio que, se dispusermos sobre o mesmo eixo três bobinas deslocadas entre si de $2\pi/3$ rad e girarmos o conjunto com velocidade angular constante, no interior de um campo magnético uniforme, obteremos nos seus terminais um sistema de tensões de mesmo valor máximo e defasadas entre si de $2\pi/3$ rad, conforme Fig. 1.



(a) - Bobinas do gerador (b) - Valores instantâneos das tensões

Figura 1. Obtenção de um sistema trifásico de tensões

Definimos, para um sistema polifásico simétrico, “*seqüência de fase*” como sendo a ordem pela qual as tensões das fases passam pelo seu máximo. Por exemplo, no sistema trifásico da Fig. 1, a seqüência de fase é *A-B-C*, uma vez que as tensões passam consecutivamente pelo valor máximo na ordem *A-B-C*. Evidentemente, uma alteração cíclica não altera a seqüência de fase, isto é, a seqüência *A-B-C* é a mesma que *B-C-A* e que *C-A-B*. À seqüência *A-B-C* é dado o nome “*seqüência direta*” ou “*seqüência positiva*”, e à seqüência *A-C-B*, que coincide com *C-B-A* e *B-A-C*, dá-se o nome de “*seqüência inversa*” ou “*seqüência negativa*”.

EXEMPLO 1 - Um sistema trifásico simétrico tem seqüência de fase *B-A-C* e $\underline{V}_C = 220 \angle 40^\circ \text{ V}$. Determinar as tensões \underline{V}_A e \underline{V}_B .

SOLUÇÃO: Sendo a seqüência de fase *B-A-C*, a primeira tensão a passar pelo valor máximo será v_B , a qual será seguida, na ordem, por v_A e v_C . Portanto, deverá ser:

$$v_B = V_M \cos(\omega t + \theta) \quad , \quad v_A = V_M \cos(\omega t + \theta - 2\pi/3) \quad , \quad v_C = V_M \cos(\omega t + \theta - 4\pi/3)$$

em que θ representa o ângulo inicial ou a rotação de fase em relação à origem. No instante $t=0$, teremos

$$v_B = V_M \cos \theta \quad , \quad v_A = V_M \cos(\theta - 2\pi/3) \quad , \quad v_C = V_M \cos(\theta - 4\pi/3)$$

Sendo $V = V_M / \sqrt{2}$, fasorialmente teremos

$$\underline{V}_B = V \angle \theta \quad , \quad \underline{V}_A = V \angle \theta - 2\pi/3 \quad , \quad \underline{V}_C = V \angle \theta - 4\pi/3$$

Por outro lado, sendo dado $\underline{V}_C = 220 \angle 40^\circ \text{ V}$, resulta

$$V = 220 \text{ V} \quad ; \quad \theta + 120^\circ = 40^\circ \text{ ou } \theta = -80^\circ \quad ,$$

e portanto $\underline{V}_B = 220 \angle -80^\circ \text{ V}$, $\underline{V}_A = 220 \angle -200^\circ \text{ V}$, $\underline{V}_C = 220 \angle 40^\circ \text{ V}$

Chegaríamos ao mesmo resultado raciocinando com o diagrama fasorial. De fato, lembramos que o valor instantâneo de uma grandeza cossenoidal é dado pela projeção do fasor que a representa (utilizando como módulo o valor máximo) sobre o eixo real, fazendo com que os fasores girem no sentido anti-horário com velocidade angular ω (vetores girantes). Evidentemente, poderemos imaginar os vetores girantes fixos e o eixo real girando com velocidade angular ω no sentido horário. Em tais condições, a origem deverá sobrepor-se consecutivamente a \underline{V}_B , \underline{V}_A e \underline{V}_C (Fig. 2), ou seja, \underline{V}_B está adiantado de 120° sobre \underline{V}_A , e este está adiantado de 120° sobre \underline{V}_C . Portanto deverá ser:

$$\begin{aligned} \underline{V}_A &= 220 / \underline{120^\circ + 40^\circ} = 220 / \underline{160^\circ} = 220 / \underline{-200^\circ} \text{ V} \\ \underline{V}_B &= 220 / \underline{-200^\circ + 120^\circ} = 220 / \underline{-80^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

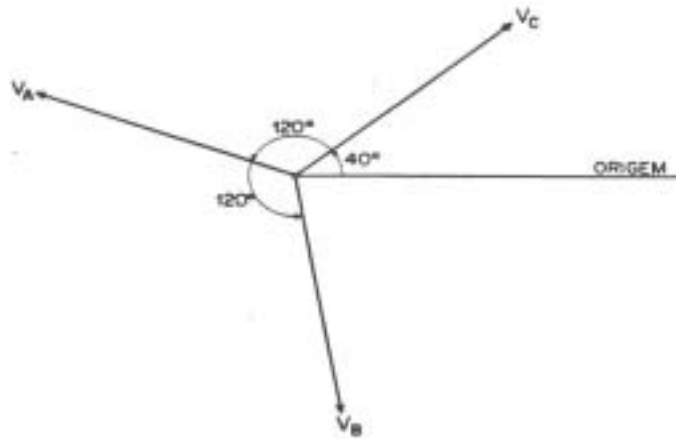


Figura 2. Diagrama de fasores para o Ex. 1

1.4 - Operador α

Ao definirmos os sistemas trifásicos, vimos que, entre as grandezas que os caracterizam, há uma rotação de fase de $\pm 120^\circ$; portanto é bastante evidente que pensemos num operador que, aplicado a um fasor, perfaça tal rotação de fase. Assim, definimos o operador α , que é um número complexo de módulo unitário e argumento 120° , de modo que, quando aplicado a um fasor qualquer, transforma-o em outro de mesmo módulo e adiantado de 120° . Em outras palavras,

$$\alpha = 1 / \underline{120^\circ} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.2)$$

No tocante à potenciação, o operador α possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \alpha = 1 / \underline{120^\circ} \\ \alpha^2 &= \alpha \cdot \alpha = 1 / \underline{120^\circ} \cdot 1 / \underline{120^\circ} = 1 / \underline{-120^\circ} \\ \alpha^3 &= \alpha^2 \cdot \alpha = 1 / \underline{-120^\circ} \cdot 1 / \underline{120^\circ} = 1 / \underline{0^\circ} \\ \alpha^4 &= \alpha^3 \cdot \alpha = 1 / \underline{0^\circ} \cdot 1 / \underline{120^\circ} = 1 / \underline{120^\circ} \end{aligned}$$

Além dessas, o operador α possui ainda a propriedade:

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 1 / \underline{0^\circ} + 1 / \underline{120^\circ} + 1 / \underline{-120^\circ} = 0, \quad (1.3)$$

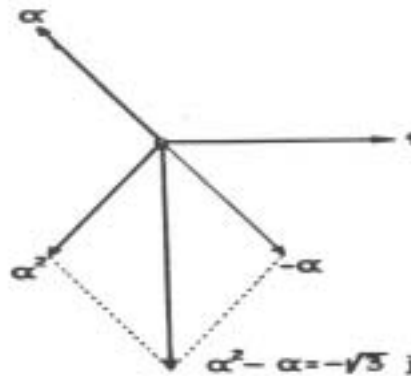
que é muito importante e será amplamente utilizada neste texto.

EXEMPLO 2 - Calcular o valor de $\alpha^2 - \alpha$

SOLUÇÃO: Da definição do operador α , temos:

$$\alpha^2 - \alpha = 1 / \underline{-120^\circ} - 1 / \underline{120^\circ} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = -\sqrt{3}j = \sqrt{3} / \underline{-90^\circ}$$

Na Fig. 3, obtivemos o valor de $\alpha^2 - \alpha$ graficamente.

Figura 3. Determinação gráfica de $\alpha^2 - \alpha$

2 - SISTEMAS TRIFÁSICOS SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS COM CARGA EQUILIBRADA - LIGAÇÕES

2.1 - Introdução

Nos sistemas trifásicos são utilizadas linhas a três ou quatro fios para a alimentação das cargas a partir dos geradores. Ora, do eletromagnetismo sabemos que haverá um acoplamento magnético entre estes fios quando um ou mais forem percorridos por corrente. Assim, a passagem de corrente senoidal em qualquer um destes fios irá induzir tensões também senoidais nos demais. Para a resolução de circuitos, em sistemas de potência, este efeito é representado através da definição de *indutâncias mútuas* entre os fios. No caso geral, a resolução de circuitos trifásicos com indutâncias mútuas é relativamente complexa, pois o sistema pode tornar-se desequilibrado. Para facilitar o entendimento dos métodos de cálculo, neste texto vamos *desconsiderar* a existência de indutâncias mútuas, ressaltando que no caso particular em que tais indutâncias sejam iguais tudo o que se apresentará continua válido, pois o sistema mantém-se equilibrado.

2.2 - Ligações Em Estrela

Suponhamos que sejam alimentadas, a partir dos terminais das três bobinas do item precedente, três impedâncias quaisquer, $\bar{Z} = Z \angle \varphi = R + j X$, porém iguais entre si (carga equilibrada). É evidente que os três circuitos assim constituídos (Fig. 4) formam três circuitos monofásicos, nos quais circularão as correntes:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A &= \frac{\mathcal{E}_{A N_A}}{\bar{Z}} = \frac{E + 0 j}{Z \angle \varphi} = \frac{E}{Z} \angle -\varphi \\ \mathcal{I}_B &= \frac{\mathcal{E}_{B N_B}}{\bar{Z}} = \frac{E \angle -120^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{E}{Z} \angle -120^\circ - \varphi \\ \mathcal{I}_C &= \frac{\mathcal{E}_{C N_C}}{\bar{Z}} = \frac{E \angle +120^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{E}{Z} \angle +120^\circ - \varphi \end{aligned}$$

Isto é, nos três circuitos circularão correntes de mesmo valor eficaz e defasadas entre si de $2\pi/3 \text{ rad}$ (ou 120°).

Observamos que os três circuitos são eletricamente independentes, e portanto podemos interligar os pontos N_A , N_B e N_C , que designaremos por N sem que isso venha a causar qualquer alteração nos mesmos. Por outro lado, observamos que os pontos N'_A , N'_B e N'_C estão ao mesmo potencial que o ponto N ; logo, podemos interligá-los designando-os por N' .

A corrente que circula pelo condutor NN' é dada por

$$\mathcal{I}_{NN'} = \mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_C = 0,$$

pois as três correntes aferentes ao nó N' têm o mesmo valor eficaz e estão defasadas entre si de $2\pi/3 \text{ rad}$. Frisamos que poderíamos ter chegado à mesma conclusão observando que os pontos N e N' estão no mesmo potencial.

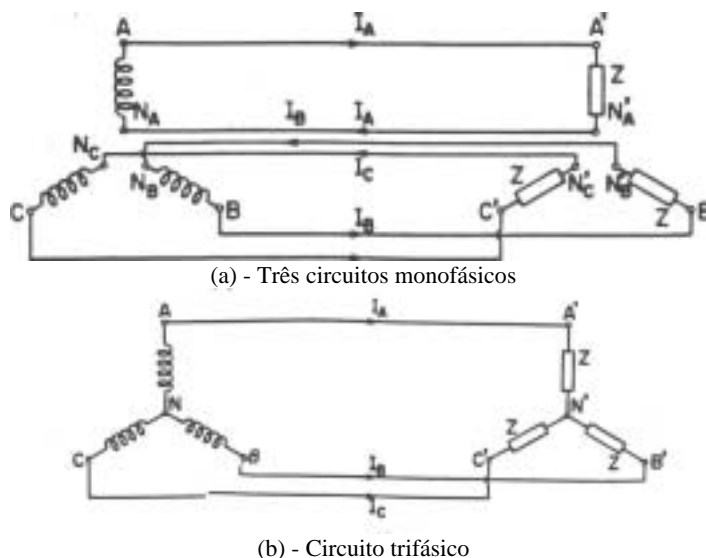


Figura 4. Sistema trifásico com gerador e carga ligados em estrela

O condutor que interliga os pontos N e N' recebe o nome de *fio neutro* ou *quarto fio*. Evidentemente, sendo nula a corrente que o percorre, poderia ser retirado do circuito.

Podemos aqui observar uma das grandes vantagens dos sistemas trifásicos. Para a transmissão da mesma potência, são utilizados 3 ou 4 fios, enquanto seriam necessários 6 fios se fossem utilizados 3 circuitos monofásicos (conforme podemos observar na Fig. 4).

Ao esquema de ligação assim obtido é dado o nome de circuito trifásico simétrico com gerador ligado em "estrela" (Y) e carga "equilibrada em estrela" (Y), dando-se o nome de "centro-estrela" ao ponto N ou N' .

Definimos:

- (1) Tensão de fase: tensão medida entre o centro-estrela e qualquer um dos terminais do gerador ou da carga;
- (2) Tensão de linha: tensão medida entre dois terminais (nenhum deles sendo o "centro-estrela") do gerador ou da carga. Evidentemente, podemos definir a tensão de linha como sendo a tensão medida entre os condutores que ligam o gerador à carga;
- (3) Corrente de fase: corrente que percorre cada uma das bobinas do gerador ou, o que é o mesmo, corrente que percorre cada uma das impedâncias da carga;
- (4) Corrente de linha: corrente que percorre os condutores que interligam o gerador à carga (exclui-se o neutro).

Salientamos que as tensões e correntes de linha e de fase num sistema trifásico simétrico e equilibrado têm, em todas as fases, valores eficazes iguais, estando defasadas entre si de $2\pi/3 \text{ rad}$. Em vista deste fato, é evidente que a determinação desses valores num circuito trifásico com gerador em Y e carga em Y, resume-se à sua determinação para o caso de um circuito monofásico constituído por uma das bobinas ligada a uma

das impedâncias por um condutor de linha, lembrando ainda que a intensidade de corrente no fio neutro é nula.

Em tudo o que se segue, indicaremos os valores de fase com um índice F e os de linha com índice L ou sem índice algum.

2.3 - Relação Entre Os Valores De Linha E Fase Para Ligação Estrela

De acordo com as definições apresentadas no item precedente, podemos preencher a Tab. 1, na qual apresentamos todos os valores de linha e de fase para o circuito da Fig. 4-b.

Tabela 1. Grandezas de fase e linha (em módulo) num trifásico simétrico e equilibrado ligado em estrela

| Valores de fase | | | | Valores de linha | | | |
|-----------------|----------|------------|------------|------------------|----------|----------|------------|
| Gerador | | Carga | | Gerador | | Carga | |
| Corrente | Tensão | Corrente | Tensão | Corrente | Tensão | Corrente | Tensão |
| I_{AN} | V_{AN} | $I_{A'N'}$ | $V_{A'N'}$ | I_A | V_{AB} | I_A | $V_{A'B'}$ |
| I_{BN} | V_{BN} | $I_{B'N'}$ | $V_{B'N'}$ | I_B | V_{BC} | I_B | $V_{B'C'}$ |
| I_{CN} | V_{CN} | $I_{C'N'}$ | $V_{C'N'}$ | I_C | V_{CA} | I_C | $V_{C'A'}$ |

Passemos agora a determinar as relações existentes entre os valores de fase e de linha. Iniciamos por observar que, para a ligação estrela, as correntes de linha e de fase são iguais, isto é,

$$\mathcal{I}_{AN} = \mathcal{I}_A, \quad \mathcal{I}_{BN} = \mathcal{I}_B, \quad \mathcal{I}_{CN} = \mathcal{I}_C$$

Para a determinação da relação entre as tensões, adotaremos um trifásico com seqüência de fase direta, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{AN} \\ \mathcal{V}_{BN} \\ \mathcal{V}_{CN} \end{bmatrix} = \mathcal{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

As tensões de linha são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{AB} &= \mathcal{V}_{AN} - \mathcal{V}_{BN} \\ \mathcal{V}_{BC} &= \mathcal{V}_{BN} - \mathcal{V}_{CN} \\ \mathcal{V}_{CA} &= \mathcal{V}_{CN} - \mathcal{V}_{AN} \end{aligned}$$

Utilizando matrizes, temos

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{AB} \\ \mathcal{V}_{BC} \\ \mathcal{V}_{CA} \end{bmatrix} = \mathcal{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \mathcal{V}_{AN} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 \\ \alpha^2 - \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Salientamos porém que

$$1 - \alpha^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \right) = \sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha^2(1 - \alpha^2) = \alpha^2 \sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

$$\alpha^2 - 1 = \alpha (1 - \alpha^2) = \alpha \sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \underline{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \\ \underline{V}_{BN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \\ \underline{V}_{CN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Da Eq. (2.1), observamos que, para um sistema trifásico simétrico e equilibrado, na ligação estrela, com seqüência de fase direta, passa-se de uma das tensões de fase à de linha correspondente multiplicando-se o fasor que a representa pelo número complexo

$$\sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

Podemos chegar às mesmas conclusões graficamente, utilizando o diagrama de fasores. De fato, \underline{V}_{AB} é dado pela soma de \underline{V}_{AN} com $\underline{V}_{NB} = -\underline{V}_{BN}$. Construímos, na Fig. 5, o fasor \underline{V}_{NB} e procedemos à soma graficamente. Note-se que o triângulo MOP é igual ao NOP e é isósceles; portanto o ângulo $P\hat{O}M$ é a metade de $M\hat{O}N$, que vale 60° . Finalmente, o módulo do fasor \underline{V}_{AB} é dado por

$$V_{AB} = |\underline{V}_{AB}| = 2 V_{AN} \cos(M\hat{O}P) = 2 V_{AN} \cos 30^\circ = \sqrt{3} V_{AN}$$

Analogamente, determinam-se as demais tensões de linha.

Devemos salientar que, em se tratando de trifásico com seqüência de fase inversa, passa-se de uma das tensões de fase à correspondente de linha multiplicando-se o fasor que representa aquela grandeza por

$$\sqrt{3} \underline{-30^\circ}$$

conforme se pode observar do diagrama de fasores da Fig. 6.

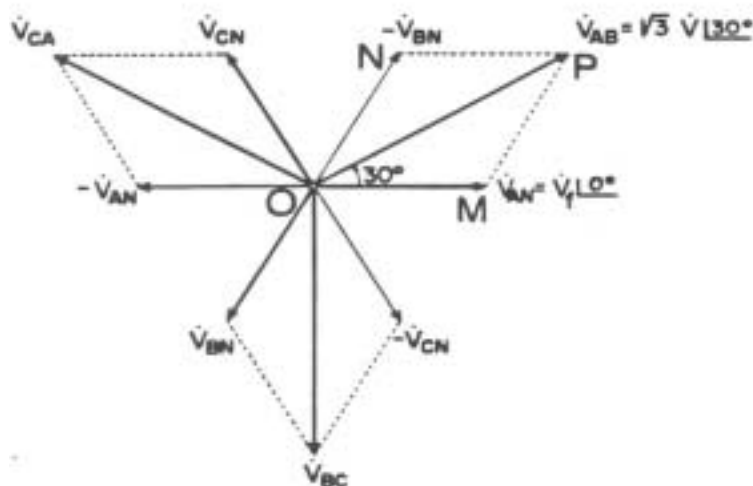


Figura 5. Obtenção das tensões de linha a partir das de fase. Seqüência de fase direta

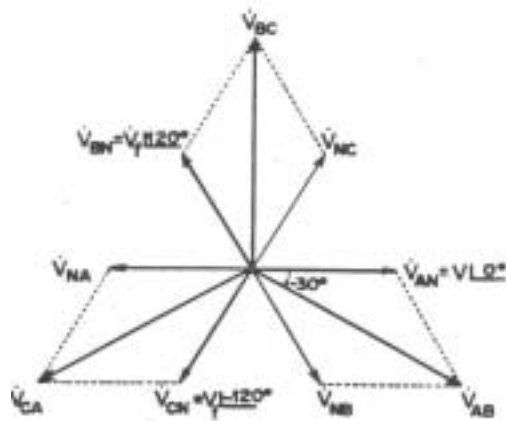


Figura 6. Relação entre os valores de fase e linha para um trifásico simétrico com seqüência de fase inversa, ligação em estrela

Analicamente, teremos

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \\ \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \\ \underline{V}_{AN} \end{bmatrix} = \underline{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} - \underline{V}_{AN} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha - \alpha^2 \\ \alpha^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Mas

$$1 - \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j \right) = \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ}$$

$$\alpha - \alpha^2 = \alpha (1 - \alpha) = \alpha \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ}$$

$$\alpha^2 - 1 = \alpha^2 (1 - \alpha) = \alpha^2 \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ}$$

e portanto,

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ} \underline{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ} \\ \underline{V}_{BN} \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ} \\ \underline{V}_{CN} \sqrt{3} \underline{\angle -30^\circ} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

No caso da determinação das tensões de fase conhecendo-se as de linha, surge uma indeterminação. De fato, supondo-se uma seqüência de fase direta, os valores

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \\ \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{\underline{V}_{AB}}{\sqrt{3} \underline{\angle 30^\circ}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

representam uma terna de fasores de tensões de fase que satisfazem aos dados de linha. Sendo $\underline{V}_{NN'}$ uma tensão qualquer, os valores

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AN'} \\ \underline{V}_{BN'} \\ \underline{V}_{CN'} \end{bmatrix} = \underline{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \underline{V}_{NN'} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

também satisfazem as condições impostas, pois

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{AN'} \\ \underline{V}_{BN'} \\ \underline{V}_{CN'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{V}_{BN'} \\ \underline{V}_{CN'} \\ \underline{V}_{AN'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \\ \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{V}_{NN'} \\ \underline{V}_{NN'} \\ \underline{V}_{NN'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \\ \underline{V}_{AN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{V}_{NN'} \\ \underline{V}_{NN'} \\ \underline{V}_{NN'} \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{V}_{AN} (1 - \alpha^2) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \underline{V}_{NN'} \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \underline{V}_{AN} \sqrt{3/30} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Ora, sendo o valor de $\underline{V}_{NN'}$ qualquer, existem infinitos valores de tensões de fase aos quais corresponde uma única terna de valores de linha. No entanto, salientamos que existe uma única terna de valores de fase que constitui um trifásico simétrico. A componente $\underline{V}_{NN'}$ representa uma tensão que é somada aos valores de fase, e portanto representa um deslocamento do centro-estrela em relação à terra. De fato, as tensões dadas podem ser representadas por um gerador de f.e.m. $\underline{V}_{NN'}$ ligado entre a terra e o centro-estrela de três geradores de f.e.m. $\underline{V}_{AN} = E$, $\underline{V}_{BN} = \alpha^2 E$ e $\underline{V}_{CN} = \alpha E$.

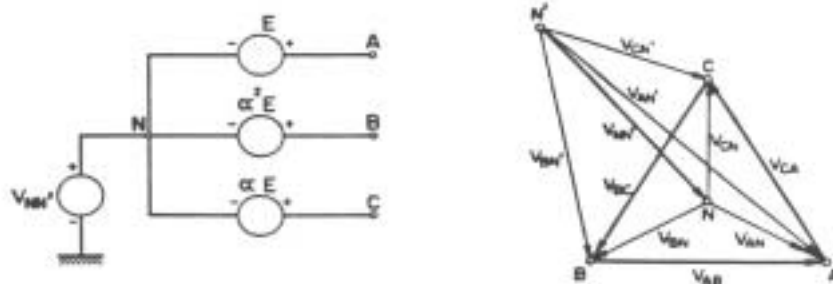


Figura 7. Interpretação da tensão $\underline{V}_{NN'}$.

Em conclusão, em se tratando de gerador trifásico simétrico aterrado, a tensão de fase está determinada, desde que se conheçam as tensões de linha, pois neste caso obrigatoriamente $\underline{V}_{NN'} = 0$. Na hipótese do gerador não estar aterrado, conhecemos as tensões de fase em relação ao centro-estrela, porém, com relação à terra, estão indeterminadas, pois, nesse caso, não temos elementos para a determinação do deslocamento do centro-estrela em relação à terra.

EXEMPLO 3 - Uma carga equilibrada ligada em estrela é alimentada por um sistema trifásico simétrico e equilibrado com seqüência de fase direta. Sabendo-se que $\underline{V}_{BN} = 220 \angle 58^\circ \text{ V}$, pedimos determinar:

- as tensões de fase na carga;
- as tensões de linha na carga.

SOLUÇÃO:

- Tensões de fase na carga

Sendo o trifásico simétrico, sabemos que os módulos de todas as tensões de fase são iguais entre si. Logo,

$$V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = 220 \text{ V}$$

Por outro lado, sendo a seqüência de fase direta, sabemos que, partindo da fase B , deverão passar pelo máximo, ordenadamente, as fases C e A . Logo, o fasor \underline{V}_{BN} está adiantado de 120° sobre o fasor \underline{V}_{CN} e este está adiantado de 120° sobre \underline{V}_{AN} . Portanto, com relação às fases, temos:

$$\text{fase de } \underline{V}_{CN} = \text{fase de } \underline{V}_{BN} - 120^\circ = 58^\circ - 120^\circ = -62^\circ$$

$$\text{fase de } \underline{V}_{AN} = \text{fase de } \underline{V}_{CN} - 120^\circ = -62^\circ - 120^\circ = -182^\circ = 178^\circ$$

Finalmente, resulta:

$$\underline{V}_{BN} = 220 \underline{/58^\circ} \text{ V} , \quad \underline{V}_{CN} = 220 \underline{/ -62^\circ} \text{ V} , \quad \underline{V}_{AN} = 220 \underline{/178^\circ} \text{ V}$$

Usando matrizes, teríamos:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \\ \underline{V}_{AN} \end{bmatrix} = \underline{V}_{BN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 \underline{/58^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \underline{/58^\circ} \\ 220 \underline{/ -62^\circ} \\ 220 \underline{/178^\circ} \end{bmatrix} \text{ V}$$

(b) Tensões de linha na carga

De (2.1), resulta:

$$\underline{V}_{AB} = 220 \underline{/178^\circ} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} = 380 \underline{/208^\circ} \text{ V} = 380 \underline{/ -152^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BC} = 220 \underline{/58^\circ} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} = 380 \underline{/88^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CA} = 220 \underline{/ -62^\circ} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} = 380 \underline{/ -32^\circ} \text{ V}$$

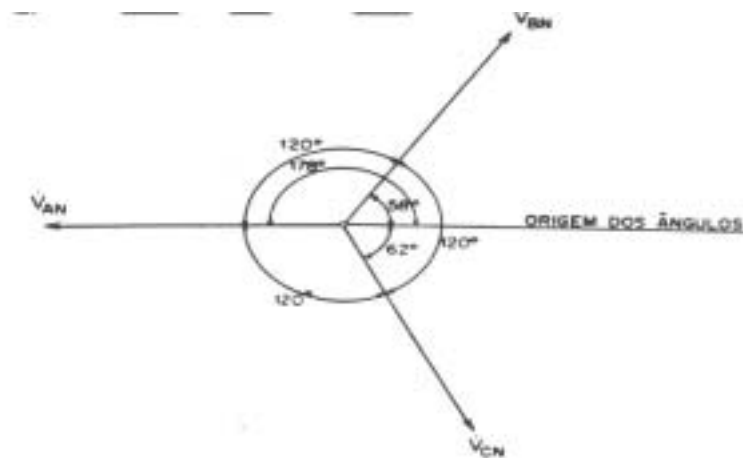


Figura 8. Diagrama de fasores para o Ex. 3

EXEMPLO 4 - Resolver o exemplo precedente admitindo-se seqüência de fase inversa.

SOLUÇÃO:

(a) Cálculo das tensões de fase na carga

Como no exemplo precedente, os módulos das tensões de fase são todos iguais e valem 220 V.

Para a determinação da fase de \underline{V}_{CN} e \underline{V}_{AN} , salientamos que, em sendo a seqüência de fase inversa (B-A-C) o fasor \underline{V}_{AN} está atrasado de 120° em relação ao fasor \underline{V}_{BN} , e o fasor \underline{V}_{CN} está atrasado 120° em relação ao \underline{V}_{AN} . Logo,

$$\underline{V}_{BN} = 220 \underline{/58^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{V}_{AN} = 220 \underline{/58^\circ - 120^\circ} = 220 \underline{/ -62^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CN} = 220 \underline{/ -62^\circ - 120^\circ} = 220 \underline{/ -182^\circ} = 220 \underline{/178^\circ} \text{ V}$$

(b) Cálculo das tensões de linha na carga

De (2.2), resulta:

$$\underline{V}_{AB} = 220 \angle -62^\circ \sqrt{3} \angle -30^\circ = 380 \angle -92^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BC} = 220 \angle 58^\circ \sqrt{3} \angle -30^\circ = 380 \angle 28^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CA} = 220 \angle 178^\circ \sqrt{3} \angle -30^\circ = 380 \angle 148^\circ \text{ V}$$

Na Fig. 9, apresentamos o diagrama de fasores.

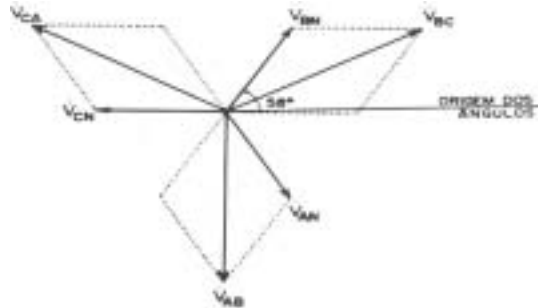


Figura 9. Diagrama de fasores para o Ex. 4

2.4 - Resolução De Circuitos Com Gerador E Carga Em Estrela

Para a resolução de circuitos trifásicos, pode-se proceder do mesmo modo que para os monofásicos, isto é, podemos utilizar análise de malha ou nodal ou, ainda, qualquer dos métodos aplicáveis à resolução dos circuitos monofásicos. Porém, como veremos a seguir, o cálculo do circuito fica bastante simplificado levando-se em conta as simetrias existentes nos trifásicos simétricos com carga equilibrada.

Exemplificando, suponhamos que se queira resolver o circuito da Fig. 10, no qual conhecem-se as tensões de fase do gerador (seqüência direta) e as impedâncias da linha e da carga, \bar{Z}' e \bar{Z} , respectivamente. Pretendemos determinar as correntes nas três fases. Conhecemos:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \\ \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \end{bmatrix} = E \angle \theta \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \bar{Z} = Z \angle \varphi_1 \quad \text{e} \quad \bar{Z}' = Z' \angle \varphi_2$$

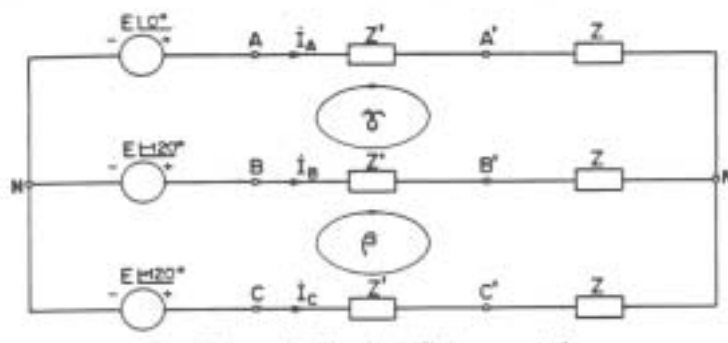


Figura 10. Circuito trifásico em estrela

Procedendo à resolução pelo método das correntes fictícias de Maxwell, teremos duas malhas, $NAA'N'B'BN$ e $NBB'N'C'CN$, nas quais adotaremos as correntes γ e β , respectivamente. Logo, teremos

$$\mathcal{V}_{AN} - \mathcal{V}_{BN} = 2\gamma (\bar{Z} + \bar{Z}') - \beta (\bar{Z} + \bar{Z}')$$

$$\mathcal{V}_{BN} - \mathcal{V}_{CN} = -\gamma (\bar{Z} + \bar{Z}') + 2\beta (\bar{Z} + \bar{Z}')$$

isto é,

$$2\gamma - \beta = \frac{\mathcal{V}_{AN} - \mathcal{V}_{BN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} \quad \text{e} \quad -\gamma + 2\beta = \frac{\mathcal{V}_{BN} - \mathcal{V}_{CN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'},$$

e então

$$\gamma = \frac{1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}')} [2\mathcal{V}_{AN} - (\mathcal{V}_{BN} + \mathcal{V}_{CN})]$$

$$\beta = \frac{1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}')} [-2\mathcal{V}_{CN} + (\mathcal{V}_{AN} + \mathcal{V}_{BN})]$$

Por outro lado, observamos que

$$\mathcal{V}_{BN} + \mathcal{V}_{CN} = \mathcal{V}_{AN} (\alpha^2 + \alpha) = -\mathcal{V}_{AN}$$

e que

$$\mathcal{V}_{AN} + \mathcal{V}_{BN} = \mathcal{V}_{AN} (1 + \alpha^2) = -\alpha \mathcal{V}_{AN} = -\mathcal{V}_{CN}$$

logo

$$\gamma = \frac{\mathcal{V}_{AN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'}, \quad \beta = \frac{-\mathcal{V}_{CN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'}$$

e portanto

$$\mathcal{I}_A = \gamma = \frac{\mathcal{V}_{AN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \frac{\mathcal{E}_A / \theta}{\bar{Z} + \bar{Z}'}$$

$$\mathcal{I}_B = \beta - \gamma = \frac{1}{\bar{Z} + \bar{Z}'} (-\mathcal{V}_{CN} - \mathcal{V}_{AN}) = \frac{\mathcal{V}_{BN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \frac{\alpha^2 \mathcal{E}_A / \theta}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \alpha^2 \mathcal{I}_A$$

$$\mathcal{I}_C = -\beta = \frac{\mathcal{V}_{CN}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \frac{\alpha \mathcal{E}_A / \theta}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \alpha \mathcal{I}_A$$

As expressões acima mostram que teria sido suficiente calcular a corrente \mathcal{I}_A , dada pela relação entre a tensão da fase A e a impedância total da mesma fase ($\bar{Z} + \bar{Z}'$). Determinamos as correntes \mathcal{I}_B e \mathcal{I}_C simplesmente imprimindo a \mathcal{I}_A uma rotação de fase de -120° e $+120^\circ$, respectivamente.

Podemos chegar ao mesmo resultado de maneira muito mais fácil, isto é, começando por observar que, sendo um sistema trifásico simétrico e equilibrado com carga equilibrada, os pontos N e N' estão ao mesmo potencial, ou seja

$$\mathcal{V}_{AN} = \mathcal{V}_{AN'}$$

Logo, podemos interligá-los por um condutor sem alterar o circuito, dado que nesse condutor não circulará corrente. Nessas condições, o circuito da Fig. 10 transforma-se no da Fig. 11, no qual temos três malhas independentes:

$$NAA'N', NBB'N' \text{ e } NCC'N'$$

Salientamos que as impedâncias das três malhas são iguais e valem $(\bar{Z} + \bar{Z}')$, e as f.e.m. das malhas valem \mathcal{E} , $\alpha^2 \mathcal{E}$, $\alpha \mathcal{E}$.

Portanto as três correntes valerão

$$\mathcal{I}_{AA'} = \frac{\mathcal{E}}{\bar{Z} + \bar{Z}'}, \quad \mathcal{I}_{BB'} = \frac{\alpha^2 \mathcal{E}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \alpha^2 \mathcal{I}_{AA'}, \quad \mathcal{I}_{CC'} = \frac{\alpha \mathcal{E}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \alpha \mathcal{I}_{AA'}$$

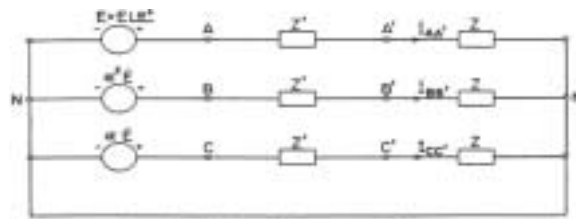


Figura 11. Circuito trifásico em estrela com neutro

Devemos notar que tudo se passa como se tivéssemos que resolver o circuito monofásico da Fig. 12, no qual interligamos os pontos N e N' por um fio de impedância nula.

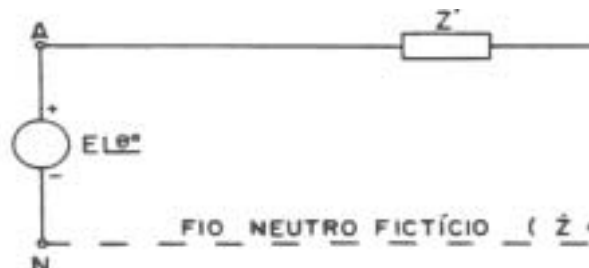


Figura 12. Circuito monofásico equivalente

EXEMPLO 5 - Um alternador trifásico alimenta por meio de uma linha equilibrada uma carga trifásica equilibrada. Conhecemos:

- (1) a tensão de linha do alternador (380 V) e a frequência (60 Hz);
- (2) o tipo de ligação do alternador (Y);
- (3) o número de fios da linha (3);
- (4) a resistência (0,2 Ω) e a reatância indutiva (0,5 Ω) de cada fio da linha;
- (5) a impedância da carga (3 + j 4 Ω).

Pedimos:

- (a) as tensões de fase e de linha no gerador;
- (b) as correntes de fase e de linha fornecidas pelo gerador;
- (c) as tensões de fase e de linha na carga;
- (d) a queda de tensão na linha (valores de fase e de linha);
- (e) o diagrama de fasores.

SOLUÇÃO:

- (a) Tensões de fase e de linha no gerador

Admitindo-se seqüência de fase A-B-C, e adotando V_{AN} com fase inicial nula, resulta

$$\underline{V}_{AN} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BN} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CN} = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

e portanto

$$\underline{V}_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \underline{V}_{AN} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot 220 \angle 0^\circ = 380 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BC} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \underline{V}_{BN} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot 220 \angle -120^\circ = 380 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CA} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \underline{V}_{CN} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot 220 \angle 120^\circ = 380 \angle 150^\circ \text{ V}$$

(b) Determinação da intensidade de corrente

O circuito a ser utilizado para a determinação da corrente é o da Fig. 13.b, no qual temos

$$\underline{V}_{AN} = \underline{I}_A [R + R_C + j(X + X_C)]$$

isto é,

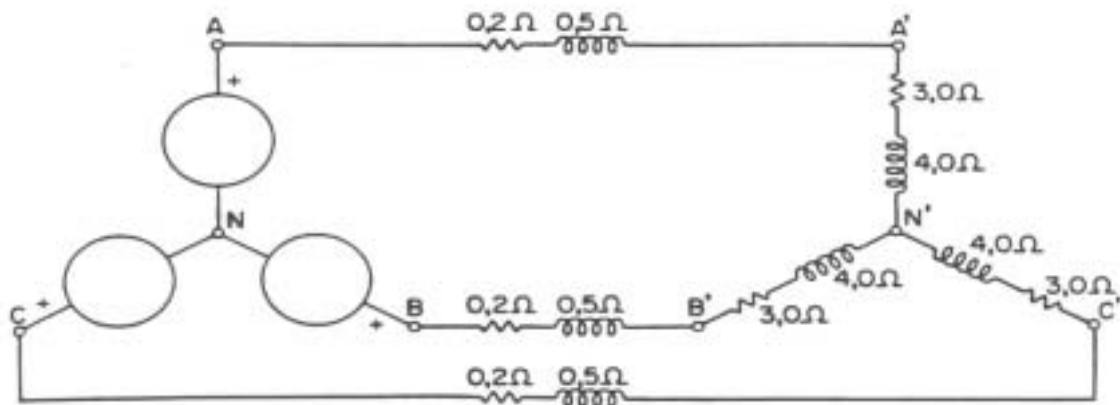
$$\underline{I}_A = \frac{\underline{V}_{AN}}{R + R_C + j(X + X_C)} = \frac{220 + j0}{3,2 + j4,5} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5,52 \angle 54,6^\circ} = 39,84 \angle -54,6^\circ \text{ A}$$

Logo,

$$\underline{I}_A = 39,84 \angle -54,6^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = 39,84 \angle -174,6^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = 39,84 \angle 65,4^\circ \text{ A}$$



(a) Circuito trifásico



(b) Circuito monofásico equivalente

Figura 13. Determinação do circuito monofásico equivalente

(c) Tensão na carga

(i) valores de fase:

$$\underline{V}_{A'N'} = \bar{Z}_C \underline{I}_A = 5 \angle 53,1^\circ \cdot 39,84 \angle -54,6^\circ = 199,2 \angle -1,5^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{B'N'} = 199,2 \angle -121,5^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{C'N'} = 199,2 \angle -118,5^\circ \text{ V}$$

(ii) valores de linha:

$$\underline{V}_{A'B'} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \underline{V}_{A'N'} = \sqrt{3} \cdot 199,2 \angle 28,5^\circ = 345 \angle 28,5^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{B'C'} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \underline{V}_{B'N'} = \sqrt{3} \cdot 199,2 \angle -91,5^\circ = 345 \angle -91,5^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{C'A'} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \underline{V}_{C'N'} = \sqrt{3} \cdot 199,2 \angle 148,5^\circ = 345 \angle 148,5^\circ \text{ V}$$

(d) Queda de tensão na linha

(i) valores de fase:

$$\underline{V}_{AN} - \underline{V}_{A'N'} = \underline{V}_{AA'} = \bar{Z} \underline{I}_A = 0,54 \angle 68,2^\circ \cdot 39,84 \angle -54,6^\circ = 21,5 \angle 13,6^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BN} - \underline{V}_{B'N'} = \underline{V}_{BB'} = 21,5 \angle -106,4^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CN} - \underline{V}_{C'N'} = \underline{V}_{CC'} = 21,5 \angle 133,6^\circ \text{ V}$$

(ii) valores de linha:

$$\underline{V}_{AB} - \underline{V}_{A'B'} = \bar{Z} (\underline{I}_A - \underline{I}_B) = \bar{Z} \underline{I}_A (1 - \alpha^2) = \bar{Z} \underline{I}_A \sqrt{3} \angle 30^\circ = 21,5 \angle 13,6^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 37,2 \angle 43,6^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BC} - \underline{V}_{B'C'} = 37,2 \angle -76,4^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CA} - \underline{V}_{C'A'} = 37,2 \angle 163,6^\circ \text{ V}$$

(e) Diagrama de fasores

Na Fig. 14, representamos o diagrama de fasores.

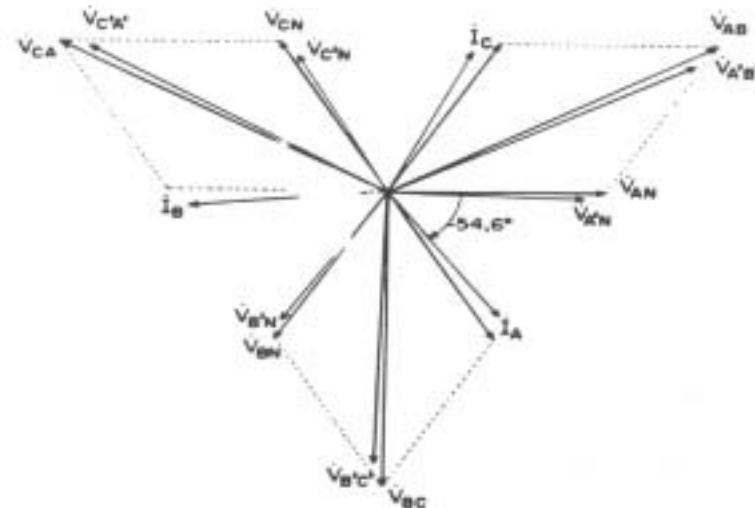


Figura 14. Diagrama de fasores para o Ex. 5

2.5 - Ligações Em Triângulo

Retomemos as três bobinas do item 1.3, e vamos ligá-las a três impedâncias \bar{Z} iguais entre si, conforme indicado na Fig. 15. Notar que as malhas $AA'N'_AN_A$, $BB'N'_BN_B$ e $CC'N'_CN_C$ são eletricamente independentes; logo, podemos interligar os pontos C e N_B sem alterar em nada o circuito. Por outro lado, os pontos C' e N'_B estão ao mesmo potencial; logo, podem ser interligados, e podemos substituir os condutores $C-C'$ e $N_B-N'_B$ por um único condutor. Os pontos comuns CN_B e $C'N'_B$ serão designados por C e C' , respectivamente. Após realizar a interligação desses pontos, observamos que a malha $AA'N'_AN_A$ é eletricamente independente do restante do circuito; portanto, por raciocínio análogo, podemos interligar os pontos AN_C e $A'N'_C$, que designaremos por A e A' , respectivamente. Finalmente, observamos que os pontos B e N_A estão ao mesmo potencial, pois

$$V_{BN_A} = V_{BN_B} + V_{CN_C} + V_{AN_A} = 0 \quad (2.3)$$

e que os pontos B' e N'_A também estão ao mesmo potencial, pois

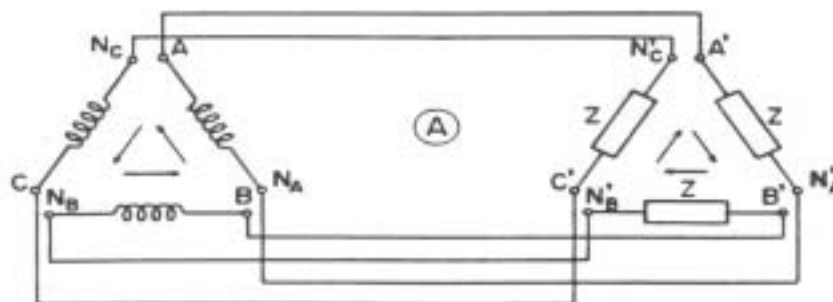
$$V_{B'N'_A} = V_{B'N'_B} + V_{C'N'_C} + V_{A'N'_A} = \bar{Z} + \bar{Z} + \bar{Z} = 0$$

isto é,

$$V_{B'N'_A} = \bar{Z} (\bar{Z} + \bar{Z} + \bar{Z}) = \bar{Z} \cdot 0 = 0$$

Portanto, poderemos interligar os pontos BN_A e $B'N'_A$ obtendo os pontos B e B' , respectivamente.

Assim, passamos para o circuito da Fig. 15.b, no qual o gerador e a carga estão ligados em triângulo.



(a) - Três circuitos monofásicos



(b) - Circuito trifásico com gerador e carga em triângulo
Figura 15. Representação da ligação triângulo

Salientamos que a Eq. (2.3) é condição necessária para que seja possível ligar um gerador em triângulo sem que haja corrente de circulação.

De acordo com as definições anteriores, as tensões de fase são:

(a) no gerador

$$\mathcal{V}_{\overline{AN_A}} = \mathcal{V}_{\overline{AB}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{BN_B}} = \mathcal{V}_{\overline{BC}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{CN_C}} = \mathcal{V}_{\overline{CA}}$$

(a) na carga

$$\mathcal{V}_{\overline{A'N'_A}} = \mathcal{V}_{\overline{A'B'}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{B'N'_B}} = \mathcal{V}_{\overline{B'C'}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{C'N'_C}} = \mathcal{V}_{\overline{C'A'}}$$

As tensões de linha no gerador e na carga são:

$$\mathcal{V}_{\overline{AB}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{BC}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{CA}} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_{\overline{A'B'}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{B'C'}} \quad , \quad \mathcal{V}_{\overline{C'A'}}$$

As correntes de fase são:

(a) no gerador

$$\mathcal{I}_{\overline{AN_A}} = \mathcal{I}_{\overline{BA}} \quad , \quad \mathcal{I}_{\overline{BN_B}} = \mathcal{I}_{\overline{CB}} \quad , \quad \mathcal{I}_{\overline{CN_C}} = \mathcal{I}_{\overline{AC}}$$

(a) na carga

$$\mathcal{I}_{\overline{A'N'_A}} = \mathcal{I}_{\overline{A'B'}} \quad , \quad \mathcal{I}_{\overline{B'N'_B}} = \mathcal{I}_{\overline{B'C'}} \quad , \quad \mathcal{I}_{\overline{C'N'_C}} = \mathcal{I}_{\overline{C'A'}}$$

As correntes de linha são:

$$\mathcal{I}_{\overline{AA}} \quad , \quad \mathcal{I}_{\overline{BB}} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_{\overline{CC}}$$

2.6 - Relação Entre Os Valores De Fase E De Linha Para A Ligação Triângulo

Na ligação triângulo, quanto às tensões é evidente que há igualdade entre as de fase e as de linha. Para a determinação da relação entre as correntes de linha e de fase, adotaremos inicialmente um sistema trifásico simétrico e equilibrado com seqüência de fase direta, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\overline{A'B'}} &= I_F / \underline{\theta} \\ \mathcal{I}_{\overline{B'C'}} &= I_F / \underline{\theta - 120^\circ} \\ \mathcal{I}_{\overline{C'A'}} &= I_F / \underline{\theta + 120^\circ} \end{aligned}$$

ou, com matrizes,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{\overline{A'B'}} \\ \mathcal{I}_{\overline{B'C'}} \\ \mathcal{I}_{\overline{C'A'}} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{\overline{A'B'}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Aplicando aos nós A' , B' e C' da Fig. 15.b a 1ª lei de Kirchhoff, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\overline{AA'}} &= \mathcal{I}_{\overline{A'B'}} - \mathcal{I}_{\overline{C'A'}} \\ \mathcal{I}_{\overline{BB'}} &= \mathcal{I}_{\overline{B'C'}} - \mathcal{I}_{\overline{A'B'}} \\ \mathcal{I}_{\overline{CC'}} &= \mathcal{I}_{\overline{C'A'}} - \mathcal{I}_{\overline{B'C'}} \end{aligned}$$

Matricialmente, teremos

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{AA'} \\ \mathcal{I}_{BB'} \\ \mathcal{I}_{CC'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \\ \mathcal{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{C'A'} \\ \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \mathcal{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{AA'} \\ \mathcal{I}_{BB'} \\ \mathcal{I}_{CC'} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Porém, como visto anteriormente,

$$1 - \alpha = \sqrt{3} \angle -30^\circ, \quad \alpha^2 - 1 = \alpha^2 \sqrt{3} \angle -30^\circ, \quad \alpha - \alpha^2 = \alpha \sqrt{3} \angle -30^\circ$$

logo será

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{AA'} \\ \mathcal{I}_{BB'} \\ \mathcal{I}_{CC'} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \mathcal{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ou seja, num circuito trifásico simétrico e equilibrado, seqüência direta, com carga equilibrada ligada em triângulo, obtemos as correntes de linha multiplicando as correspondentes de fase pelo número complexo

$$\sqrt{3} \angle -30^\circ \quad (2.5)$$

Com construção análoga à realizada no item 2.3 e utilizando as Eq. (2.4), obtemos as Eq. (2.4) graficamente, Fig. 16.

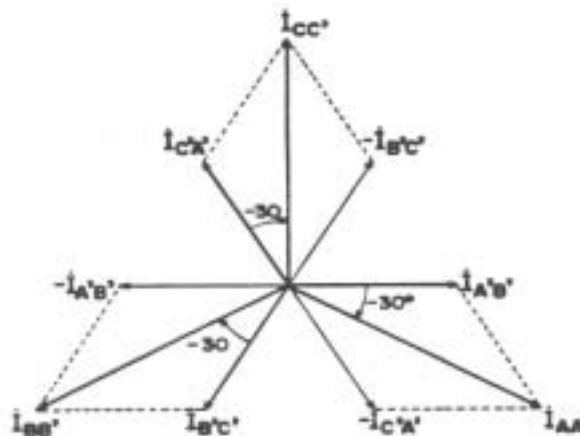


Figura 16. Relação entre os valores das correntes de fase e de linha na ligação triângulo, seqüência de fase direta

Pode-se demonstrar (Fig. 17) que, analogamente a quanto foi feito, sendo a seqüência de fase inversa, as correntes de linha estarão adiantadas de 30° sobre as correspondentes de fase, isto é, para a seqüência de fase inversa, teremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{AA'} &= \mathcal{I}_{A'B'} \sqrt{3} / 30^\circ \\
 \mathcal{I}_{BB'} &= \mathcal{I}_{B'C'} \sqrt{3} / 30^\circ \\
 \mathcal{I}_{CC'} &= \mathcal{I}_{C'A'} \sqrt{3} / 30^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

No caso da determinação das correntes de fase conhecendo-se as de linha, surge uma indeterminação. De fato, supondo-se uma seqüência de fase direta, os valores

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \\ \mathcal{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \frac{\mathcal{I}_{AA'}}{\sqrt{3} / -30^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

representam uma terna de fasores de correntes de fase que satisfazem aos dados de linha. Sendo \mathcal{I}_{CIRC} uma corrente qualquer, os valores

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \\ \mathcal{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \mathcal{I}_{CIRC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

também satisfazem as condições impostas, pois

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{AA'} \\ \mathcal{I}_{BB'} \\ \mathcal{I}_{CC'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \\ \mathcal{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{C'A'} \\ \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \\ \mathcal{I}_{C'A'} \end{bmatrix} + \mathcal{I}_{CIRC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{C'A'} \\ \mathcal{I}_{A'B'} \\ \mathcal{I}_{B'C'} \end{bmatrix} - \mathcal{I}_{CIRC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \mathcal{I}_{A'B'} (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \mathcal{I}_{CIRC} \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{A'B'} \sqrt{3} / -30^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Assim, como o valor de \mathcal{I}_{CIRC} é qualquer, existem infinitos valores de correntes de fase aos quais corresponde uma única terna de valores de linha. A componente \mathcal{I}_{CIRC} representa uma corrente de circulação; no entanto, para uma carga trifásica equilibrada alimentada por um sistema de tensões trifásico simétrico, esta componente será sempre nula. Desta forma, as correntes de fase estão determinadas, desde que as correntes de linha sejam conhecidas, pois neste caso obrigatoriamente $\mathcal{I}_{CIRC} = 0$.

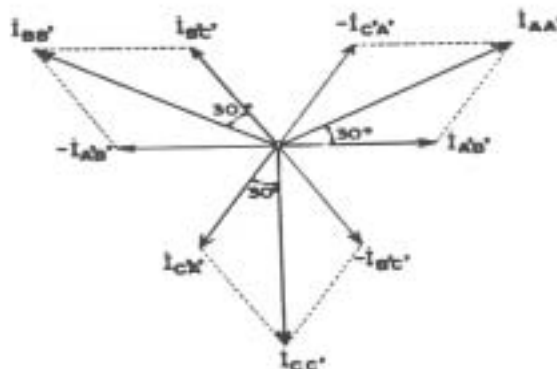


Figura 17. Relação entre os valores das correntes de fase e de linha na ligação triângulo, seqüência de fase inversa

2.7 - Resolução De Circuitos Trifásicos Em Triângulo

Conforme já foi dito, os sistemas trifásicos podem ser resolvidos utilizando-se qualquer dos métodos de resolução de circuitos, porém, devido às simetrias existentes nos trifásicos, empregam-se soluções particulares que muito simplificam a resolução.

Suponhamos ter que resolver um circuito trifásico simétrico e equilibrado em que temos um gerador fictício ligado em triângulo* que alimenta por meio de uma linha de impedância \bar{Z}' uma carga com impedância de fase \bar{Z} , ligada em triângulo (Fig. 18).

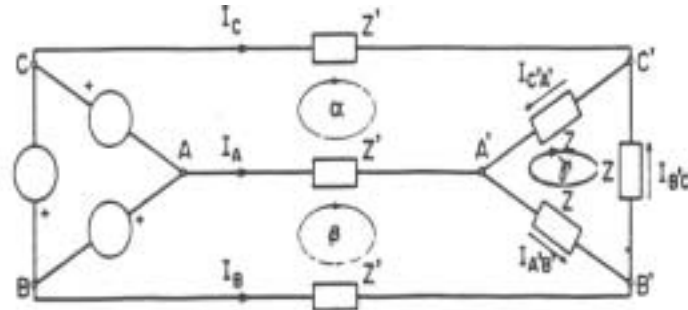


Figura 18. Circuito trifásico em triângulo

Resolvendo-se o sistema por correntes fictícias de malhas, resultam as equações

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{CA} &= (2\bar{Z}' + \bar{Z})\alpha - \bar{Z}'\beta - \bar{Z}\gamma \\ \mathcal{V}_{AB} &= -\bar{Z}'\alpha + (2\bar{Z}' + \bar{Z})\beta - \bar{Z}\gamma \\ 0 &= -\bar{Z}\alpha - \bar{Z}\beta + 3\bar{Z}\gamma \end{aligned}$$

das quais poderemos determinar os valores de α , β e γ .

Como a resolução do sistema acima é por demais trabalhosa, vamos abandoná-la e tentar um novo caminho, isto é, vamos aplicar a lei de Ohm à malha $AA'B'BA$ e, lançando mão das simetrias do sistema, determinar o valor da corrente $\mathcal{I}_{A'B'}$. Adotando-se seqüência de fase direta, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A'B'} &= I_F \angle 0^\circ, \quad \mathcal{I}_{B'C'} = I_F \angle -120^\circ, \quad \mathcal{I}_{C'A'} = I_F \angle 120^\circ \\ \mathcal{V}_{AB} &= \mathcal{I}_A \bar{Z}' + \mathcal{I}_{A'B'} \bar{Z}' - \mathcal{I}_B \bar{Z}' = (\mathcal{I}_A - \mathcal{I}_B) \bar{Z}' + \mathcal{I}_{A'B'} \bar{Z}' \end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{I}_A - \mathcal{I}_B = \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ - \alpha^2 \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ = \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ (1 - \alpha^2) = \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ \sqrt{3} \angle 30^\circ = 3 I_F$$

ou $\mathcal{I}_A - \mathcal{I}_B = 3 I_F$; logo

$$\mathcal{V}_{AB} = (3 \bar{Z}' + \bar{Z}) I_F \quad (2.7)$$

* Nos sistemas trifásicos, não é usual a utilização da ligação em triângulo para um gerador, pois a tensão gerada não é puramente senoidal, isto é, existe uma componente de 3ª harmônica que tem tensões $E_M \cos(3\omega t)$, $E_M \cos[3(\omega t - 2\pi/3)] = E_M \cos(3\omega t)$ e $E_M \cos[3(\omega t + 2\pi/3)] = E_M \cos(3\omega t)$ e que dará lugar a uma corrente de circulação, conforme a Eq. (2.3).

Adotando-se $\mathcal{V}_{AB} = V / \varphi$, resulta

$$V \cos \varphi = I_F (3R' + R)$$

$$V \sin \varphi = I_F (3X' + X)$$

e portanto

$$I_F = \frac{V}{\sqrt{(3R' + R)^2 + (3X' + X)^2}} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|}$$

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{3X' + X}{3R' + R}$$

Assim, temos

$$\mathcal{I}_{A'B'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|} \angle 0^\circ, \quad \mathcal{I}_{B'C'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|} \angle -120^\circ, \quad \mathcal{I}_{C'A'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|} \angle 120^\circ$$

A Eq. (2.7) mostra-nos que o problema proposto transforma-se no da determinação da corrente que circula numa malha cuja f.e.m. vale \mathcal{V}_{AB} e cuja impedância é $3\bar{Z}' + \bar{Z}$.

Chegaremos ao mesmo resultado muito mais facilmente substituindo a carga ligada em triângulo por outra que lhe seja equivalente, ligada em estrela (Fig. 19). De fato, lembrando a transformação triângulo-estrela, deveremos substituir a carga em triângulo cuja impedância de fase vale \bar{Z} , por carga em estrela cuja impedância de fase vale $\bar{Z}/3$. Substituindo-se o gerador em triângulo por outro em estrela, de modo que a tensão de linha seja a mesma, recaímos no caso já estudado de ligação em estrela, resultando

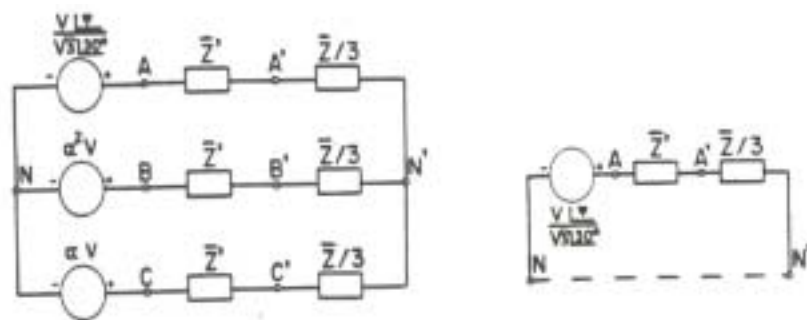
$$\mathcal{I}_{A'N'} = \mathcal{I}_{AN} = \mathcal{I}_{AA'} \left(\bar{Z}' + \frac{\bar{Z}}{3} \right)$$

logo,

$$\mathcal{I}_{AA'} = \frac{3\mathcal{I}_{AN}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}}$$

Finalmente, a corrente de fase, na carga em triângulo, é dada por

$$\mathcal{I}_{A'B'} = \frac{\mathcal{I}_{AA'}}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{3\mathcal{I}_{AN}}{(3\bar{Z}' + \bar{Z})\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{\mathcal{I}_{AN} \sqrt{3} \angle 30^\circ}{3\bar{Z}' + \bar{Z}} = \frac{\mathcal{I}_{AB}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}}$$



(a) Circuito trifásico em estrela

(b) Circuito monofásico equivalente

Figura 19. Substituição do circuito em triângulo por equivalente ligado em estrela

EXEMPLO 6 - Um gerador trifásico alimenta por meio de uma linha uma carga trifásica equilibrada. Conhecemos:

- (1) o tipo de ligação do gerador (Δ) e da carga (Δ);
- (2) a tensão de linha do gerador (220 V), a frequência (60 Hz), e a seqüência de fase (direta);

- (3) a impedância de cada um dos ramos da carga, $(3 + j4) \Omega$;
 (4) a resistência $0,2 \Omega$ e a reatância indutiva $0,15 \Omega$ de cada fio da linha,

Pedimos:

- (a) as tensões de fase e de linha no gerador;
 (b) as correntes de linha;
 (c) as correntes de fase na carga;
 (d) as tensões de fase e de linha na carga;
 (e) o diagrama de fasores.

SOLUÇÃO:

- (a) Tensões de fase e de linha no gerador

As tensões de fase coincidem com as de linha e valem, para a seqüência A-B-C,

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = 220 \underline{1/0^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ V}$$

- (b) Determinação das correntes de linha

Substituindo a carga em triângulo por outra equivalente em estrela, temos o circuito da Fig. 20, do qual obtemos:

$$\underline{I}_{AA'} = \frac{\underline{V}_{AN}}{\underline{Z}' + \underline{Z}/3} = \frac{(220 \underline{1/0^\circ}) / (\sqrt{3} \underline{30^\circ})}{1,2 + j 1,48}$$

Logo,

$$\underline{I}_{AA'} = \frac{127 \underline{-30^\circ}}{1,9 \underline{51^\circ}} = 66,6 \underline{-81^\circ} \text{ A}$$

e então

$$\underline{I}_{BB'} = 66,6 \underline{-201^\circ} \text{ A} , \quad \underline{I}_{CC'} = 66,6 \underline{39^\circ} \text{ A}$$

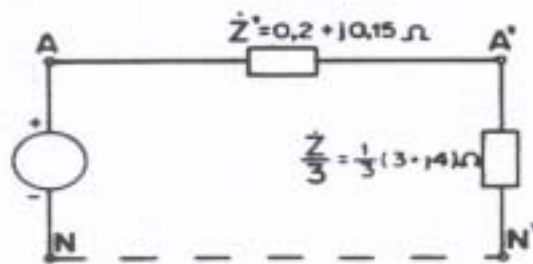


Figura 20. Circuito equivalente para o Ex. 6

- (c) Determinação das correntes de fase na carga

Na carga em triângulo, teremos:

$$\underline{I}_{A'B'} = \frac{\underline{E}_{AA'}}{\sqrt{3} / -30^\circ} = \frac{66,6 / -81^\circ}{\sqrt{3} / -30^\circ} = 38,5 / -51^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{B'C'} = 38,5 / -171^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{C'A'} = 38,5 / 69^\circ \text{ A}$$

(d) Determinação das tensões na carga

Da Fig. 20, obtemos:

$$\underline{V}_{A'N'} = \underline{E}_{AA'} \frac{\bar{Z}}{3} = \frac{66,6 / -81^\circ \cdot 5 / 53,1^\circ}{3} = 111 / -27,9^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{B'N'} = 111 / -147,9^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{C'N'} = 111 / 92,1^\circ \text{ V}$$

As tensões de fase e de linha na carga são iguais, e valem:

$$\underline{V}_{A'B'} = \underline{V}_{A'N'} \sqrt{3} / 30^\circ = 111 / -27,9^\circ \cdot \sqrt{3} / 30^\circ = 192 / 2,1^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{B'C'} = 192 / -117,9^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{C'A'} = 192 / 122,1^\circ \text{ V}$$

(e) Diagrama de fasores

Na Fig. 21 representamos o diagrama de fasores.

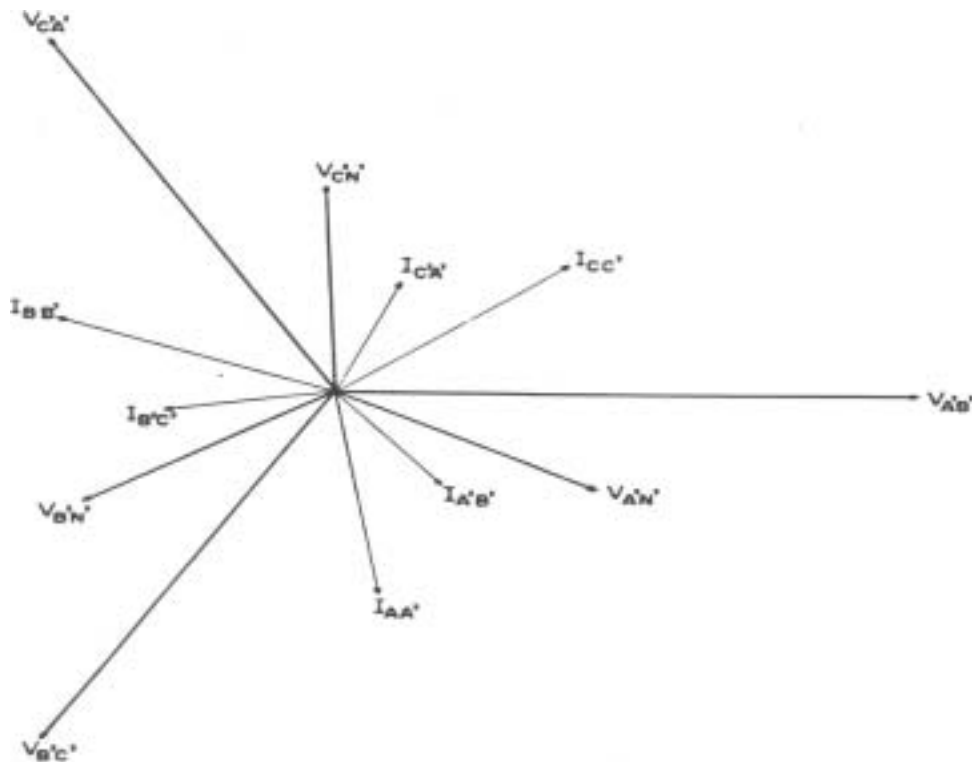


Figura 21. Diagrama de fasores para o Ex. 6

3 - POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Sabemos que a potência instantânea, absorvida por uma carga, é dada pelo produto dos valores instantâneos da tensão pela corrente; isto é, sendo

$v = V_M \cos(\omega t + \theta)$, valor instantâneo da tensão, em que θ é o ângulo inicial da tensão;

$i = I_M \cos(\omega t + \delta)$, valor instantâneo da corrente, em que δ é o ângulo inicial da corrente,

será

$$p = v i = V_M I_M \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \delta)$$

Por outro lado, temos que

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

Fazendo $\alpha = \omega t + \theta$ e $\beta = \omega t + \delta$, será

$$p = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\omega t + \theta - \omega t - \delta) + \cos(\omega t + \theta + \omega t + \delta)]$$

Lembrando que os valores eficazes estão relacionados com os máximos por $\sqrt{2}$:

$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$ (valor eficaz da tensão),

$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$ (valor eficaz da corrente),

e adotando-se:

$$\varphi = \theta - \delta : \text{ defasagem entre a tensão e a corrente na carga,}$$

resulta:

$$p = V I \cos \varphi + V I \cos(2\omega t + \theta + \delta) \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) mostra que a potência fornecida à carga é constituída por duas parcelas, uma $V I \cos \varphi$, constante no tempo, e a outra, $V I \cos(2\omega t + \theta + \delta)$, variável no tempo com uma frequência igual a duas vezes a frequência da rede.

A primeira parcela dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente pelo cosseno do ângulo de rotação de fase entre ambas (designado por fator de potência da carga) representa a potência que é absorvida pela carga sendo transformada em calor ou em trabalho, isto é, a *potência ativa*. A segunda parcela, variando cossenoidalmente no tempo, representa uma potência que ora é absorvida pela carga, ora é fornecida pela carga; seu valor médio nulo representa uma energia que, durante um quarto de período, é absorvida pela carga e armazenada no campo magnético ou elétrico ligado ao circuito e, no quarto de período seguinte, é devolvida à rede. É designada por *potência flutuante*.

Na Fig. 22 representamos uma carga monofásica constituída pela associação em série de um indutor com um resistor e representamos os valores instantâneos da tensão, corrente e potência. Nesse circuito, substituindo-se o indutor por um capacitor de capacidade conveniente para não alterar o valor máximo da corrente, observamos que a potência ativa não se altera, a flutuante mantém seu valor máximo, sofrendo porém uma mudança em sua fase inicial. Isso nos mostra que, do conhecimento da potência ativa, da tensão e da corrente na carga, podemos determinar o fator de potência da carga, porém não podemos determinar

sua natureza (capacitiva ou indutiva). Evidentemente deveremos definir alguma outra grandeza que nos permita levantar essa indeterminação.

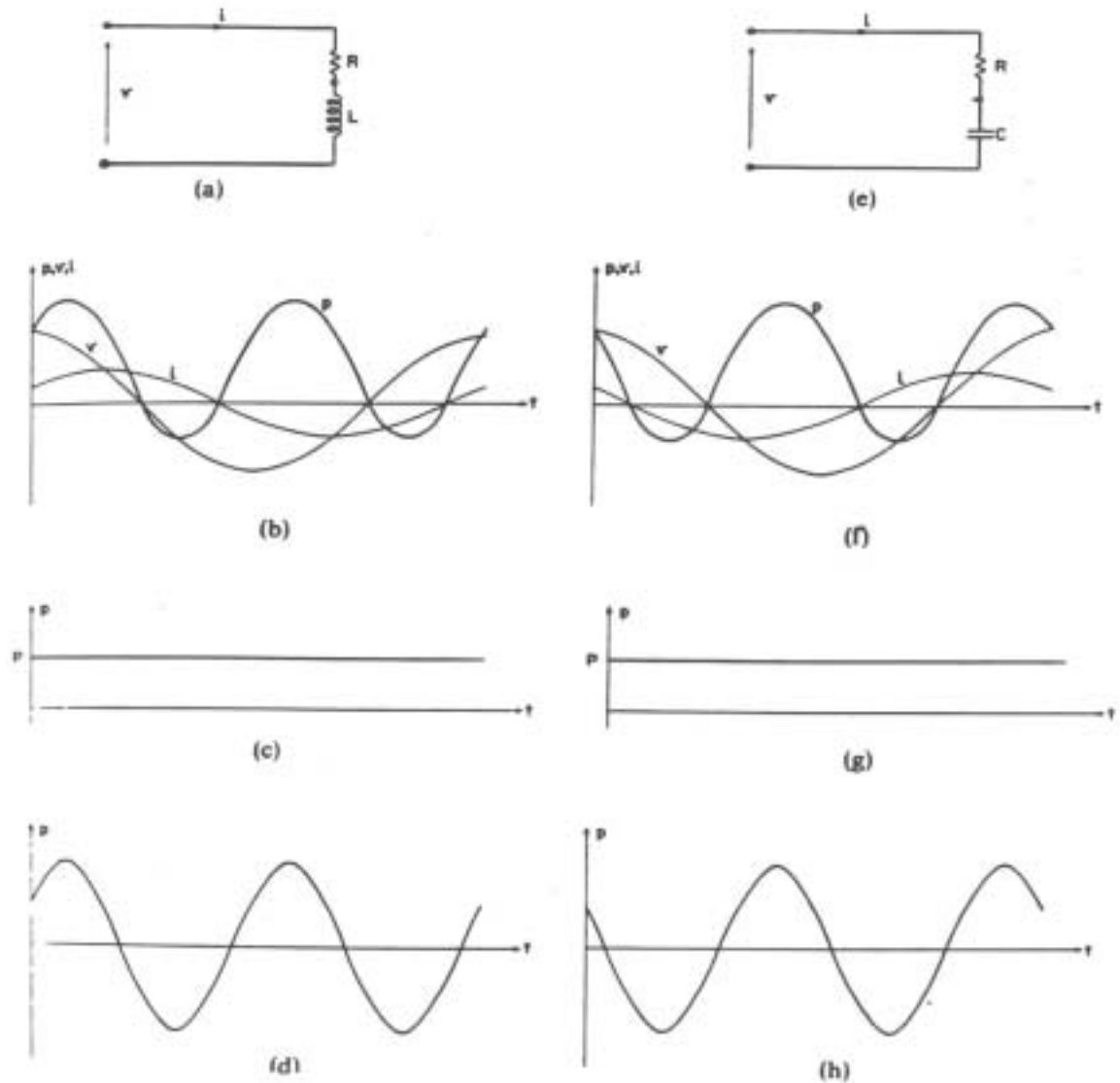


Figura 22. Potência instantânea em circuitos monofásicos ($\theta = 0$, $\delta = \pm\varphi$)

- (a) Circuito R-L (b) Curvas de tensão, corrente e potência no circuito R-L
 (c) Curva de potência ativa no circuito R-L (d) Curva de potência flutuante no circuito R-L
 (e) Circuito R-C ($X_C = X_L$) (f) Curvas de tensão, corrente e potência no circuito R-C
 (g) Curva de potência ativa no circuito R-C (h) Curva de potência flutuante no circuito R-C

Assim, por analogia com corrente contínua, onde a potência era dada pelo produto da tensão pela corrente, define-se *potência aparente*, S , ao produto dos valores eficazes da tensão pela corrente, isto é,

$$S = V I \quad (3.2)$$

A potência ativa, evidentemente, será o produto da potência aparente pelo "fator de potência", isto é,

$$P = V I \cos \varphi = S \cos \varphi \quad (3.3)$$

Finalmente, define-se *potência reativa*, Q , ao produto da potência aparente pelo seno do ângulo de rotação de fase entre a tensão e a corrente na carga, isto é,

$$Q = V I \operatorname{sen} \varphi = S \operatorname{sen} \varphi \quad (3.4)$$

Notamos que, na Eq. (3.4), a potência reativa fornecida a uma carga pode ser positiva ($\varphi > 0$) ou negativa ($\varphi < 0$). Pela convenção adotada, ou seja, sendo φ a rotação de fase entre a tensão e a corrente ($\varphi = \theta - \delta$), resulta:

- potência reativa absorvida por uma carga indutiva: positiva ($\varphi = \theta - \delta > 0$);
 - potência reativa absorvida por uma carga capacitiva: negativa ($\varphi = \theta - \delta < 0$),
- que está de acordo com a convenção geralmente adotada em sistemas elétricos de potência.

Salientamos que as potências ativa, reativa e aparente têm a mesma dimensão, pois $\operatorname{sen} \varphi$ e $\operatorname{cos} \varphi$ são adimensionais; logo, deveriam ser medidas na mesma unidade. No entanto, a fim de se evitarem confusões, optou-se por definir três unidades diferentes, a saber:

| | |
|--------------------|----------------------------|
| potência ativa: | WATT (W); |
| potência reativa: | VOLT-AMPÈRE-REATIVO (VAr); |
| potência aparente: | VOLT-AMPÈRE (VA). |

Entre as potências aparente, ativa e reativa, existe a relação

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.5)$$

Portanto podemos definir a potência complexa por

$$\bar{S} = P + j Q = S \angle \varphi$$

Conhecendo-se os fasores representativos da tensão e da corrente numa dada carga, a potência complexa pode ser calculada pelo produto do fasor \underline{V} pelo complexo conjugado da corrente ($\bar{\underline{I}}$), ou seja,

$$\bar{S} = \underline{V} \bar{\underline{I}} \quad (3.6)$$

De fato, sendo

$$\underline{V} = V \angle \theta \quad , \quad \underline{I} = I \angle \delta$$

resulta

$$\begin{aligned} \underline{V} \bar{\underline{I}} &= V \angle \theta \cdot I \angle -\delta = V I \angle \theta - \delta = V I \operatorname{cos} (\theta - \delta) + j V I \operatorname{sen} (\theta - \delta) = \\ &= V I \operatorname{cos} \varphi + j V I \operatorname{sen} \varphi = P + j Q = \bar{S} \end{aligned}$$

Evidentemente o ângulo $\varphi = \theta - \delta$ será positivo quando a carga for indutiva, e negativo quando a carga for capacitiva. Logo, essa relação está concorde com a convenção adotada para a potência reativa.

EXEMPLO 7 - Determinar a impedância de uma carga que absorve $(100 + j 50)$ kVA quando a tensão vale 220 V .

SOLUÇÃO:

Temos $\bar{\underline{I}} = \frac{\bar{S}}{\underline{V}}$; logo, $\underline{I} = \frac{\bar{S}^*}{\underline{V}}$.

$$\text{Então } \bar{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{\underline{V} \underline{I}^*}{\underline{S}^*} = \frac{|\underline{V}|}{\underline{S}^*} = \frac{V^2}{\underline{S}^*}$$

$$\text{Adotando-se } \underline{V} = V \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{resulta } \bar{Z} = \frac{220^2}{(100 - j 50) \cdot 10^3} = (0,3872 + j 0,1963) \Omega$$

3.2 - Expressão Geral Da Potência Em Sistemas Trifásicos

Seja uma carga trifásica na qual os valores instantâneos das tensões e correntes de fase são:

$$\begin{aligned} v_A &= V_{A_M} \cos(\omega t + \theta_A) & i_A &= I_{A_M} \cos(\omega t + \delta_A) \\ v_B &= V_{B_M} \cos(\omega t + \theta_B) & i_B &= I_{B_M} \cos(\omega t + \delta_B) \\ v_C &= V_{C_M} \cos(\omega t + \theta_C) & i_C &= I_{C_M} \cos(\omega t + \delta_C) \end{aligned}$$

A potência instantânea em cada fase é dada por

$$\begin{aligned} p_A &= v_A i_A = V_{F_A} I_{F_A} \cos(\theta_A - \delta_A) + V_{F_A} I_{F_A} \cos(2\omega t + \theta_A + \delta_A) \\ p_B &= v_B i_B = V_{F_B} I_{F_B} \cos(\theta_B - \delta_B) + V_{F_B} I_{F_B} \cos(2\omega t + \theta_B + \delta_B) \\ p_C &= v_C i_C = V_{F_C} I_{F_C} \cos(\theta_C - \delta_C) + V_{F_C} I_{F_C} \cos(2\omega t + \theta_C + \delta_C) \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que V_{F_A} , V_{F_B} e V_{F_C} são os valores eficazes das tensões de fase e I_{F_A} , I_{F_B} e I_{F_C} são os valores eficazes das correntes de fase.

Fazendo-se

$$\begin{aligned} \theta_A - \delta_A &= \varphi_A \\ \theta_B - \delta_B &= \varphi_B \\ \theta_C - \delta_C &= \varphi_C \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} p_A &= V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_A} I_{F_A} \cos(2\omega t + \theta_A - \varphi_A) \\ p_B &= V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_B} I_{F_B} \cos(2\omega t + \theta_B - \varphi_B) \\ p_C &= V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C + V_{F_C} I_{F_C} \cos(2\omega t + \theta_C - \varphi_C) \end{aligned}$$

A potência total é dada por

$$p = p_A + p_B + p_C$$

Portanto, o valor médio da potência será

$$P = P_A + P_B + P_C = V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C$$

A potência complexa será

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C = \underline{V}_{F_A} \underline{I}_{F_A}^* + \underline{V}_{F_B} \underline{I}_{F_B}^* + \underline{V}_{F_C} \underline{I}_{F_C}^*$$

Tratando-se de trifásico simétrico, com seqüência direta, teremos

$$\begin{aligned}V_{F_A} &= V_{F_B} = V_{F_C} = V_F \\ \theta_B &= \theta_A - 2\pi/3 \\ \theta_C &= \theta_A + 2\pi/3\end{aligned}$$

e, sendo a carga equilibrada,

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \varphi_B = \varphi_C = \varphi \\ I_{F_A} &= I_{F_B} = I_{F_C} = I_F\end{aligned}$$

Substituindo esses valores nas Eq. (3.7) resulta

$$\begin{aligned}p_A &= V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos (2 \omega t + \theta_A - \varphi) \\ p_B &= V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos (2 \omega t + \theta_A - 4\pi/3 - \varphi) \\ p_C &= V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos (2 \omega t + \theta_A + 4\pi/3 - \varphi)\end{aligned}$$

e portanto, a potência instantânea total é dada por

$$p = p_A + p_B + p_C = 3 V_F I_F \cos \varphi = P \quad (3.8)$$

isto é, nos trifásicos simétricos e equilibrados a potência instantânea coincide com a potência média.

A potência complexa será dada por

$$\bar{S} = \mathcal{V}_{F_A} \mathcal{I}_{F_A} + \alpha^2 \mathcal{V}_{F_A} (\alpha^2 \mathcal{I}_{F_A})^* + \alpha \mathcal{V}_{F_A} (\alpha \mathcal{I}_{F_A})^*$$

mas, sendo

$$\alpha^* = \alpha^2 \quad \text{e} \quad (\alpha^2)^* = \alpha$$

resulta

$$\bar{S} = \mathcal{V}_{F_A} \mathcal{I}_{F_A} + \mathcal{V}_{F_A} \mathcal{I}_{F_A} + \mathcal{V}_{F_A} \mathcal{I}_{F_A} = 3 \mathcal{V}_{F_A} \mathcal{I}_{F_A}$$

Desenvolvendo, obtemos

$$\bar{S} = 3 V_F / \theta_A \cdot I_F / -\delta_A = 3 V_F I_F / \theta_A - \delta_A = 3 V_F I_F / \varphi$$

então

$$\bar{S} = 3 V_F I_F \cos \varphi + j 3 V_F I_F \sin \varphi \quad (3.9)$$

Da Eq. (3.9), notamos que

$$\begin{aligned}S &= 3 V_F I_F \\ P &= 3 V_F I_F \cos \varphi \\ Q &= 3 V_F I_F \sin \varphi\end{aligned} \quad (3.10)$$

Uma vez que, usualmente, nos sistemas trifásicos não se dispõe dos valores de tensão e corrente de fase, é oportuno transformar as Eq. (3.10) de modo a termos a potência complexa em função dos valores de tensão de linha, V_L , e da corrente de linha, I_L . Para tanto, suponhamos inicialmente a carga ligada em estrela; teremos

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad , \quad I_F = I_L$$

Logo,

$$\bar{S} = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi + j 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \sin \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi + j \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} V_L I_L \\ P &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Admitindo-se a carga ligada em triângulo, teremos

$$V_F = V_L \quad , \quad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

Logo,

$$\bar{S} = 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi + j 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \sin \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi + j \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} V_L I_L \\ P &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.12)$$

As Eq. (3.11) e (3.12) mostram-nos que a expressão geral da potência complexa para trifásicos simétricos com carga equilibrada é função exclusivamente dos valores da tensão de linha, da corrente de linha, e da defasagem, para uma mesma fase, entre a tensão de fase e a corrente de fase. Define-se *fator de potência de uma carga trifásica equilibrada* como sendo o cosseno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente numa mesma fase. Em se tratando de carga desequilibrada, o fator de potência é definido pela relação P/S ou $P/\sqrt{P^2 + Q^2}$. Em conclusão, podemos afirmar que:

- Num sistema trifásico simétrico e equilibrado, com carga equilibrada, a potência aparente fornecida à carga é dada pelo produto da tensão de linha pela corrente de linha e por $\sqrt{3}$.
- Num sistema trifásico simétrico e equilibrado, com carga equilibrada, a potência ativa fornecida à carga é dada pelo produto da tensão de linha pela corrente de linha, pelo fator de potência e por $\sqrt{3}$.
- Num sistema trifásico simétrico e equilibrado, com carga equilibrada, a potência reativa fornecida à carga é dada pelo produto da tensão de linha pela corrente de linha, pelo seno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente na fase e por $\sqrt{3}$.

Isto é, num trifásico simétrico e equilibrado com carga equilibrada, qualquer que seja o tipo de ligação, são válidas as equações

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{3} V_L I_L \\
 P &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\
 Q &= \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \\
 \bar{S} &= P + j Q = 3 \underline{\mathcal{V}}_{F_A} I_{F_A}^*
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

EXEMPLO 8 - Uma carga trifásica equilibrada tem fator de potência 0,8 indutivo. Quando alimentada por um sistema trifásico simétrico, com seqüência de fase direta e com $\underline{\mathcal{V}}_{AB} = 220/25^\circ \text{ V}$, absorve 15200 W. Pedimos determinar o fasor da corrente de linha.

SOLUÇÃO:

(a) Determinação do módulo da corrente (I)

Temos

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \varphi} = \frac{15200}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,8} \cong 50 \text{ A}$$

(b) Determinação do ângulo de fase da corrente de linha

Admitamos inicialmente a carga ligada em triângulo. As tensões de linha, que coincidem com as de fase, são

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{V}}_{AB} \\ \underline{\mathcal{V}}_{BC} \\ \underline{\mathcal{V}}_{CA} \end{bmatrix} = 220 / \underline{\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 / 25^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ V}$$

As correntes de fase estão defasadas das tensões correspondentes de $\varphi = \text{arc cos}(\text{fator de potência})$

Salientamos que, para cargas indutivas, a corrente está atrasada e, para capacitivas, adiantada. Logo, no nosso caso,

$$\varphi = \theta - \delta = \text{arc cos}(0,8) = 37^\circ$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathcal{I}}_{AB} &= I_{F_A} / \underline{\delta} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} / \theta - \varphi = \frac{50}{\sqrt{3}} / 25^\circ - 37^\circ = \frac{50}{\sqrt{3}} / -12^\circ \text{ A} \\
 \underline{\mathcal{I}}_{BC} &= \frac{50}{\sqrt{3}} / -132^\circ \text{ A} \\
 \underline{\mathcal{I}}_{CA} &= \frac{50}{\sqrt{3}} / 108^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

Sendo a seqüência de fase direta, as correntes de linha serão obtidas pela aplicação de (2.4), resultando:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{I}}_A \\ \underline{\mathcal{I}}_B \\ \underline{\mathcal{I}}_C \end{bmatrix} = \sqrt{3} / -30^\circ \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{I}}_{AB} \\ \underline{\mathcal{I}}_{BC} \\ \underline{\mathcal{I}}_{CA} \end{bmatrix} = 50 / -42^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ A}$$

Admitindo-se a carga ligada em estrela, as tensões de linha e de fase serão dadas por:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = V / \theta \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 \angle 25^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} V$$

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \\ \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{V / \theta}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 127 \angle -5^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} V$$

A corrente $\underline{I}_{AN} = \underline{I}_A$ deverá estar atrasada 37° em relação a \underline{V}_{AN} . Logo,

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{AN} \\ \underline{I}_{BN} \\ \underline{I}_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = 50 \angle -5^\circ - 37^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 50 \angle -42^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} A$$

Observamos que, quer a carga esteja em triângulo, quer esteja em estrela, a defasagem entre a tensão de linha e a corrente na mesma linha, sendo a seqüência de fase direta, é $\varphi + 30^\circ$ (Fig. 23). Ou seja, sendo $\varphi = 37^\circ$:

- defasagem entre \underline{V}_{AB} e \underline{I}_A : $\theta_{AB} - \delta_A = 25^\circ - (-42^\circ) = 67^\circ = \varphi + 30^\circ$
- defasagem entre \underline{V}_{BC} e \underline{I}_B : $\theta_{BC} - \delta_B = -95^\circ - (-162^\circ) = 67^\circ = \varphi + 30^\circ$
- defasagem entre \underline{V}_{CA} e \underline{I}_C : $\theta_{CA} - \delta_C = 145^\circ - (78^\circ) = 67^\circ = \varphi + 30^\circ$

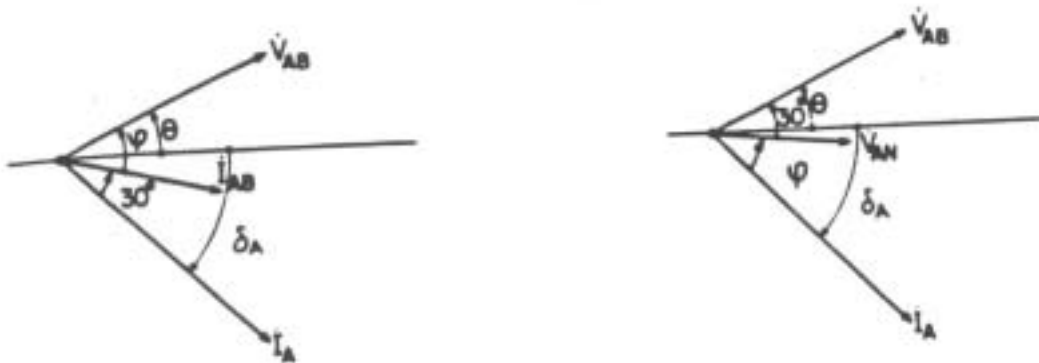


Figura 23. Defasagem entre tensão e corrente

EXEMPLO 9 - Um sistema trifásico simétrico alimenta carga equilibrada, formada por três impedâncias iguais, que absorve 50 MW e 20 MVar quando alimentada por tensão de 200 kV . Sendo a seqüência de fase inversa e a tensão $\underline{V}_{AB} = 220 \angle 12^\circ \text{ kV}$, pedimos determinar a corrente de linha.

SOLUÇÃO:

(a) Determinação da potência absorvida quando a tensão é 220 kV

Admitindo a carga ligada em estrela, temos

$$P = \sqrt{3} V I \cos \varphi \quad \text{e} \quad I = \frac{V/\sqrt{3}}{Z}$$

logo,

$$P = \frac{V^2}{Z} \cos \varphi$$

Sendo a impedância da carga constante, qualquer que seja o valor da tensão, resulta imediatamente que

$$\frac{P'}{P} = \frac{V'^2}{V^2}$$

isto é,

$$P' = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 P = \left(\frac{220}{200}\right)^2 \cdot 50 = 60,5 \text{ MW}$$

Analogamente,

$$Q' = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 Q = \left(\frac{220}{200}\right)^2 \cdot 20 = 24,2 \text{ MVar}$$

(b) Determinação do módulo da corrente

Temos

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3} V I \sin \varphi}{\sqrt{3} V I \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{24,2}{60,5} = 0,4$$

e portanto

$$|\varphi| = 21,8^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = 0,928$$

Então

$$I = \frac{60,5 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,928} = 171,8 \text{ A}$$

(c) Determinação do ângulo de fase da corrente

Sendo a seqüência de fase inversa, temos

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AB} \\ \underline{V}_{BC} \\ \underline{V}_{CA} \end{bmatrix} = V \underline{\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = 220 \underline{12^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ kV}$$

Considerando a carga ligada em estrela, temos:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{AN} \\ \underline{V}_{BN} \\ \underline{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{V/\theta}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = 127 \angle 42^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ kV}$$

Como a potência reativa fornecida à carga é positiva, concluímos que o fator de potência é 0,928 indutivo, isto é, a corrente de fase está atrasada de $21,8^\circ$ em relação à tensão correspondente ($\varphi = \theta - \delta = 21,8^\circ$). Logo,

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = 171,8 \angle 20,2^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Neste caso, observamos que, quer a carga esteja em triângulo, quer esteja em estrela, a rotação de fase entre a tensão de linha e a corrente na mesma linha, sendo a seqüência de fase inversa, é $\varphi - 30^\circ$.

3.3 - Medida De Potência Em Sistemas Polifásicos - Teorema De Blondel

Pode-se demonstrar que, numa carga alimentada por um sistema polifásico a m fases e n fios, a potência total absorvida pela carga é obtida da soma das leituras em $n - 1$ wattímetros ligados de modo que cada uma das bobinas amperométricas esteja inserida num dos $n - 1$ fios e as bobinas voltimétricas estejam ligadas tendo um ponto em comum com a amperométrica e o outro terminal de todas elas sobre o n -ésimo fio (Teorema de Blondel - 1893).

Vamos demonstrar o teorema de Blondel para uma carga ligada em estrela alimentada por trifásico a três fios (a demonstração do teorema para uma carga em triângulo é análoga). A potência lida num wattímetro é sempre igual ao valor médio da potência instantânea por ele medida. Assim, da Fig. 24, e sendo T o período das correntes e tensões, as potências lidas em cada um dos wattímetros valem:

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_0^T p_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AC} i_A dt$$

$$W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T p_2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_{BC} i_B dt$$

Mas

$$v_{AC} = v_{AN} + v_{NC} = v_{AN} - v_{CN}$$

$$v_{BC} = v_{BN} + v_{NC} = v_{BN} - v_{CN}$$

Logo,

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AC} i_A + v_{BC} i_B) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [v_{AN} i_A + v_{BN} i_B - v_{CN} (i_A + i_B)] dt$$

Mas, aplicando-se a 1ª lei de Kirchhoff ao nó N , temos

$$i_C = -(i_A + i_B) \quad (3.14)$$

logo,

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_A + v_{BN} i_B + v_{CN} i_C) dt = P$$

Salientamos que a potência total coincide com a soma das leituras dos wattímetros, quer se trate de carga equilibrada ou não. Isso porque, mesmo no caso de carga desequilibrada ($i_A \neq i_B \neq i_C$), a Eq. (3.14) é verificada.

Em se tratando de uma carga em estrela com alimentação a 4 fios (com o fio neutro), pode-se determinar a potência fornecida pela soma da leitura em dois wattímetros somente no caso de carga equilibrada, quando a Eq. (3.14) é verificada. Caso a carga seja desequilibrada, devem ser utilizados três wattímetros.

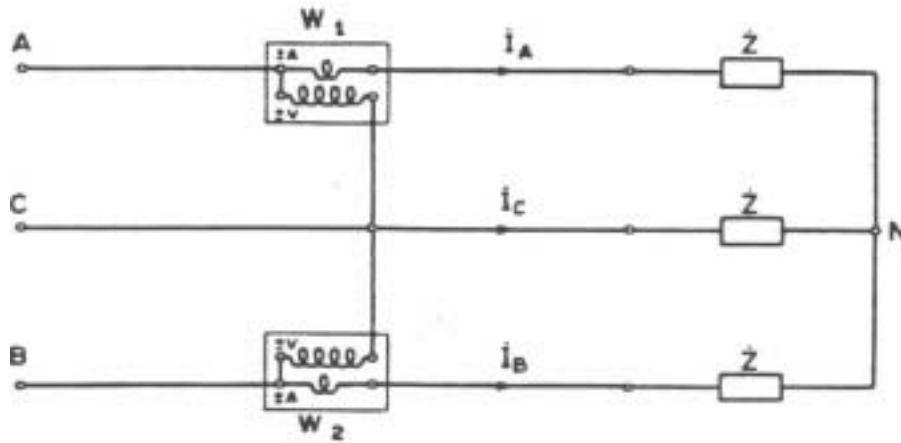


Figura 24. Esquema de ligação dos wattímetros (carga em estrela)

4. EXERCÍCIOS

Ex. 4.1 - Demonstrar, analiticamente e através de diagrama de fasores, as relações

$$\alpha - 1 = \sqrt{3} \angle 150^\circ \quad \alpha^2 - 1 = \sqrt{3} \angle -150^\circ \quad \alpha^2 - \alpha = -j\sqrt{3} \quad \alpha^4 - \alpha^5 = \sqrt{3} \angle 90^\circ$$

Ex. 4.2 - Determinar, analiticamente e através de diagrama de fasores, os fasores

$$10 \angle 40^\circ (\alpha - 1) \quad 20 \angle 30^\circ (\alpha^2 - \alpha) \quad 70 \angle -55^\circ (2\alpha + 1) \quad 85 \angle -30^\circ (2 + \alpha^5)$$

Exercícios do tipo teste de múltipla escolha

Ex. 4.3 - Numa carga equilibrada ligada em triângulo e alimentada por um trifásico assimétrico podemos afirmar que:

- (1) A soma das tensões de fase na carga é sempre nula.
- (2) A soma das correntes de fase não é nula.
- (3) A soma das correntes de linha não é nula.
- (4) Sendo a seqüência de fase direta, a corrente da linha A é obtida pela expressão $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_{AB} \sqrt{3} \angle 30^\circ$.
- (5) Nenhuma

Ex. 4.4 - Para um sistema trifásico que alimenta carga equilibrada com impedância, por fase, \bar{Z} , é verdadeira a afirmação:

- (1) A rotação de fase entre a corrente \mathcal{I}_A e a tensão \mathcal{V}_{AB} independe da seqüência de fase.
- (2) A corrente de linha é igual à de fase qualquer que seja a ligação da carga.
- (3) Determinamos o módulo da corrente de carga pela relação $I = V/Z$, sendo V o módulo da tensão \mathcal{V}_{AB} .
- (4) A soma das correntes de linha é zero.
- (5) Nenhuma.

Ex. 4.5 - Um sistema trifásico alimenta várias cargas equilibradas ligadas em paralelo. Podemos afirmar que:

- (1) A potência aparente fornecida ao conjunto das cargas é igual à soma das potências aparentes de cada carga.
- (2) O fator de potência do conjunto das cargas é obtido dividindo-se a soma das potências ativas fornecidas às cargas pela soma das potências aparentes.
- (3) A potência complexa fornecida a cada carga é dada pela expressão $\sqrt{3} V_{AB} \underline{I}_A$, na qual V_{AB} representa a tensão entre as linhas A e B e \underline{I}_A a corrente na linha A.
- (4) O fator de potência do conjunto é dado pela expressão $\cos(\text{arctg} \sum Q_i / \sum P_i)$, em que $\sum Q_i$ e $\sum P_i$ são, respectivamente, a soma algébrica das potências reativas e ativas fornecidas à carga.
- (5) Nenhuma.

Ex. 4.6 - Uma carga trifásica equilibrada, alimentada por trifásico simétrico, absorve 3800 W e -3800 VAR. Sendo a seqüência de fase C-B-A e $V_{AB} = 220/40^\circ$ V, podemos afirmar que a corrente \underline{I}_A vale:

- (1) $14,1/115^\circ$ A
- (2) $14,1/25^\circ$ A
- (3) $14,1/55^\circ$ A
- (4) Não é possível calcular a corrente, pois não conhecemos o modo de ligação da carga.
- (5) Nenhuma.

Ex. 4.7 - Num sistema trifásico simétrico com carga equilibrada, sabemos que $V_{AB} = V/\theta$ e $\underline{I}_A = I/\theta + 30^\circ$. Podemos afirmar que:

- (1) A carga é capacitiva e seu fator de potência vale 0,5.
- (2) A carga é puramente resistiva.
- (3) A potência ativa fornecida à carga vale 0,5 VI.
- (4) A potência aparente fornecida à carga vale 3VI.
- (5) Nenhuma

Ex. 4.8 - Num sistema trifásico com carga equilibrada ligamos dois wattímetros com as bobinas amperométricas nas linhas A e B, e as voltimétricas entre essas linhas e a C. Sendo a carga indutiva podemos afirmar que:

- (1) Quando a seqüência de fase for A-B-C será $W_1 > W_2$.
- (2) Quando a seqüência de fase for A-C-B será $W_1 > W_2$.
- (3) As leituras nos wattímetros independem da seqüência de fase.
- (4) A leitura de um dos wattímetros será negativa desde que o fator de potência da carga seja menor que 0,5.
- (5) Nenhuma.

Exercícios resolvidos

Ex. 4.9 - Num sistema trifásico simétrico, com seqüência de fase C-B-A, a tensão entre os pontos B e C é $380/-45^\circ$ V. Pedimos que sejam determinadas as tensões de linha e fase. Repetir a questão para:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= 220/-35^\circ \text{ V}, & V_{CA} &= 220/-45^\circ \text{ V}, & V_{AB} &= 220/-45^\circ \text{ V}, \\ V_{BC} &= 220/-65^\circ \text{ V}, & V_{BC} &= 220/35^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

(a) Tensões de linha

Sendo a seqüência de fase C-B-A, deverá ser:

$$V_{CA} = |V|/\theta, \quad V_{BC} = |V|/\theta - 120^\circ, \quad V_{AB} = |V|/\theta + 120^\circ,$$

mas, sendo

$$V_{BC} = 380/-45^\circ \text{ V},$$

deverá ser:

$$|V| = V = 380 \text{ V e } \theta - 120^\circ = -45^\circ, \text{ e então } \theta = 75^\circ$$

Logo

$$\underline{V}_{CA} = 380/75^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{BC} = 380/-45^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{AB} = 380/195^\circ = 380/-165^\circ \text{ V}$$

Para a resolução gráfica, por meio do diagrama de fasores, construímos o fasor \underline{V}_{BC} atrasado de 45° em relação à origem. Como os fasores giram em sentido anti-horário e o fasor \underline{V}_{AB} deve ser o próximo a passar pelo valor máximo, construímo-lo atrasado de 120° em relação a \underline{V}_{BC} . Analogamente, construímos \underline{V}_{CA} atrasado de 120° em relação a \underline{V}_{AB} (Fig. 25).

(b) Tensões de fase

Para a determinação analítica das tensões de fase, lembramos que dispomos somente de duas equações relacionando três incógnitas, isto é, as três equações abaixo não são independentes, pois, sendo $\underline{V}_{AB} + \underline{V}_{BC} + \underline{V}_{CA} = 0$, uma das equações é linearmente dependente das outras duas.

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AN} - \underline{V}_{BN}$$

$$\underline{V}_{BC} = \underline{V}_{BN} - \underline{V}_{CN}$$

$$\underline{V}_{CA} = \underline{V}_{CN} - \underline{V}_{AN}$$

Levantamos a indeterminação impondo um valor para a soma das tensões de fase, isto é

$$\underline{V}_{AN} + \underline{V}_{BN} + \underline{V}_{CN} = \underline{V}_{desl}$$

da qual resulta

$$\underline{V}_{BN} = \underline{V}_{desl} - \underline{V}_{AN} - \underline{V}_{CN}$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AN} - \underline{V}_{BN} = 2\underline{V}_{AN} + \underline{V}_{CN} - \underline{V}_{desl}$$

$$\underline{V}_{CA} = \underline{V}_{CN} - \underline{V}_{AN}$$

$$\underline{V}_{AN} = \frac{1}{3} (\underline{V}_{AB} - \underline{V}_{CA} + \underline{V}_{desl})$$

que nos permite determinar, impondo que $\underline{V}_{desl} = 0$,

$$\underline{V}_{AN} = \frac{1}{3} (380/195^\circ - 380/75^\circ) = 219,4/-135^\circ \text{ V}$$

ou então, sendo a seqüência de fase inversa,

$$\underline{V}_{AN} = \frac{\underline{V}_{AB}}{\sqrt{3}} = \frac{380/195^\circ}{\sqrt{3}} = 219,4/-135^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{BN} = \alpha \underline{V}_{AN}, \quad \underline{V}_{CN} = \alpha^2 \underline{V}_{AN}$$

Graficamente, construímos inicialmente o triângulo das tensões de linha, que é equilátero, e fixamos o ponto N , correspondente ao centro estrela, no baricentro do triângulo ($\underline{V}_{desl} = 0$).

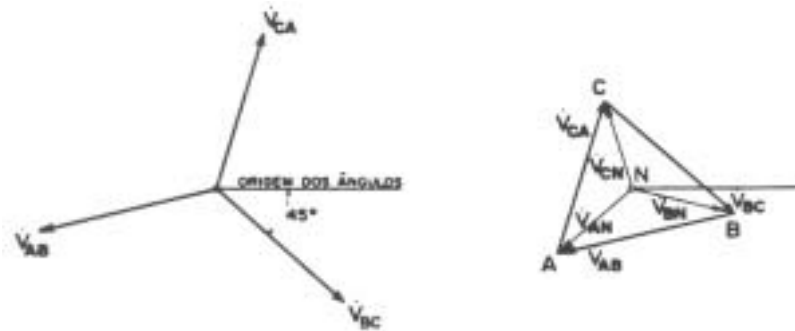


Figura 25. Diagrama de fasores para o Ex. 4.9

Ex. 4.10 - Uma carga trifásica equilibrada, ligada em triângulo, é alimentada por trifásico simétrico com seqüência de fase $B-A-C$. Conhecendo-se a corrente $\underline{I}_{BC} = 22/40^\circ \text{ A}$, pedimos determinar as correntes de fase e linha. Repetir o exercício para

$$\underline{I}_{AB} = 15/-20^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{CA} = 15/-45^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{BC} = 15/-45^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_A = 38/-50^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_B = 38/30^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_C = 38/-50^\circ \text{ A}$$

e para seqüência de fase direta.

SOLUÇÃO

(a) Correntes de fase

Sendo $\underline{I}_{BC} = 22/40^\circ \text{ A}$, e a seqüência de fase inversa ($B-A-C$), resulta

$$\underline{I}_{AB} = 22 \angle 40^\circ - 120^\circ = 22 \angle -80^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_{CA} = 22 \angle 40^\circ + 120^\circ = 22 \angle 160^\circ \text{ A}.$$

(b) Correntes de linha

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 38 \angle -50^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 38 \angle 70^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 38 \angle -170^\circ \text{ A}.$$

Ex. 4.11 - Um sistema trifásico simétrico alimenta uma carga equilibrada ligada em estrela. Sendo fornecidas a impedância de fase da carga ($6,0 + 8,0j \Omega$), a tensão de linha (220 V - 60 Hz) e a seqüência de fase (direta), pedimos:

(a) As correntes de fase e linha.

(b) O fator de potência da carga.

(c) A potência complexa fornecida à carga.

(d) As leituras em dois wattímetros ligados conforme o esquema da Fig. 26.

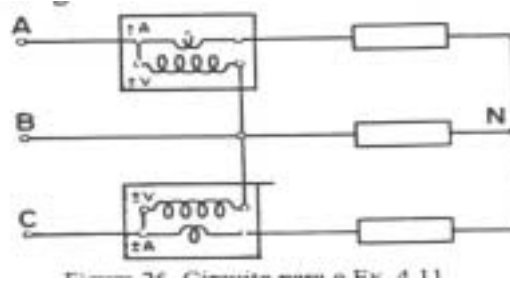


Figura 26. Circuito para o Ex. 4.11

SOLUÇÃO

(a) Determinação das correntes

Admitimos \underline{V}_{AN} com fase nula e obtemos

$$\underline{V}_{AN} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{BN} = 127 \angle -120^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{CN} = 127 \angle 120^\circ \text{ V},$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{V}_{AN}}{\underline{Z}} = \frac{127 \angle 0^\circ}{10 \angle 53,13^\circ} = 12,7 \angle -53,13^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = 12,7 \angle -173,13^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_C = 12,7 \angle 66,87^\circ \text{ A}.$$

(b) Determinação do fator de potência

O fator de potência da carga é o da impedância de fase, ou, ainda, o cosseno do ângulo de rotação de fase entre a tensão e a corrente de fase, isto é

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{6}{10} = 0,6, \quad \text{ou} \quad \cos \varphi = \cos [0^\circ - (-53,13^\circ)] = 0,6$$

(c) Determinação da potência

Temos

$$S = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 12,7 = 4839,35 \text{ VA},$$

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 12,7 \cdot 0,6 = 2903,61 \text{ W},$$

$$Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 12,7 \cdot 0,8 = 3871,48 \text{ VAR};$$

logo

$$\bar{S} = 2903,61 + 3871,48j = 4839,35 \angle 53,13^\circ \text{ VA}.$$

Alternativamente, podemos determinar a potência a partir de

$$\bar{S} = 3 \underline{V}_{AN} \underline{I}_A^* = 3 \cdot 127 \angle 0^\circ \cdot 12,7 \angle 53,13^\circ = 4839,35 \angle 53,13^\circ \text{ VA}$$

(d) Leitura nos wattímetros

Temos

$$W_1 = \Re(\mathbf{V}_{AB} \mathbf{I}_A^*) = \Re(220 \angle 30^\circ \cdot 12,7 \angle 53,13^\circ) =$$

$$= 2794 \cos 83,13^\circ = 334,21 \text{ W},$$

$$W_2 = \Re(\mathbf{V}_{CB} \mathbf{I}_C^*) = \Re(-220 \angle -90^\circ \cdot 12,7 \angle -66,87^\circ) =$$

$$= 2794 \cos 23,13^\circ = 2569,41 \text{ W},$$

e então

$$W_1 + W_2 = 334,21 + 2569,41 = 2903,62 \text{ W}$$

Ex. 4.12 - Um sistema trifásico simétrico, com tensão de linha de 440 V, alimenta uma carga equilibrada ligada em triângulo, com impedância de fase de $(8 + 6j) \Omega$. Pedimos determinar a potência complexa por fase e a potência total fornecida à carga.

SOLUÇÃO

(a) Potência de fase

A impedância de fase é dada por $8 + 6j = 10 \angle 36,87^\circ \Omega$ e, portanto, assumindo-se a tensão AB com fase zero, a corrente de fase será

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{440 \angle 0^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = 44 \angle -36,87^\circ \text{ A},$$

e então

$$\bar{S}_F = \mathbf{V}_{AB} \mathbf{I}_{AB}^* = 440 \angle 0^\circ \cdot 44 \angle 36,87^\circ = 19360 \angle 36,87^\circ \text{ VA}.$$

(b) Potência total

Para a potência fornecida à carga temos

$$\bar{S} = 3 \bar{S}_F = 58080 \angle 36,87^\circ \text{ VA}.$$

Ex. 4.13 - Um motor trifásico com potência mecânica nominal de 5 HP, de 220 V, tem, a plena carga, rendimento de 85 % e fator de potência de 82 %. Pedimos determinar a corrente de linha a plena carga. Potência útil do motor = 5 HP = 5 x 746 W (Nota: 1 HP = 746 W; 1 cv = 736 W - A unidade HP não é unidade legal brasileira).

SOLUÇÃO

A potência elétrica fornecida ao motor quando está fornecendo no eixo a potência mecânica correspondente à sua potência nominal é dada por

$$P = \frac{5 \times 746}{0,85} = 4388,23 \text{ W}.$$

Por outro lado, a potência elétrica fornecida ao motor é $P = \sqrt{3} V I \cos \varphi$, e portanto

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \varphi} = \frac{4388,23}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,82} = 14,04 \text{ A}$$

Ex. 4.14 - Uma linha trifásica simétrica alimenta um motor trifásico ligado em estrela e uma carga, ligada em triângulo, constituída de capacitores em série com resistências (Fig. 27). Sabemos que:

- (1) A impedância do motor é $\bar{Z}_m = (5 + 5j) \Omega$ por fase.
- (2) A impedância da carga é $\bar{Z}_c = (10 - 5j) \Omega$ por fase.
- (3) A impedância da linha é desprezível,
- (4) A tensão de linha é 230 V e a seqüência de fase do trifásico é a direta.

Pedimos determinar:

- (a) A corrente de fase do motor e a da carga.
- (b) A corrente de linha.

- (c) A potência fornecida ao motor, à carga, e a potência total.
 (d) O diagrama de fasores.
 (e) As leituras em três conjuntos de dois wattímetros ligados conforme o esquema da Fig. 29.

SOLUÇÃO

- (a) Cálculo das correntes

- Tensão de linha

Sendo a seqüência de fase $A-B-C$, e fixando a tensão entre as linhas A e B na origem, teremos

$$\underline{V}_{AB} = 230 \angle 0^\circ = (230 + 0j) \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BC} = 230 \angle -120^\circ = (-115 - 199,18j) \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CA} = 230 \angle 120^\circ = (-115 + 199,18j) \text{ V}$$

Figura 27. Circuito equivalente para o Ex. 4.14

- Tensões de fase

$$\underline{V}_{AN} = \frac{\underline{V}_{AB}}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = \frac{230 \angle 0^\circ}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 132,79 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{BN} = \frac{\underline{V}_{BC}}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = \frac{230 \angle -120^\circ}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 132,79 \angle -150^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{CN} = \frac{\underline{V}_{CA}}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = \frac{230 \angle 120^\circ}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 132,79 \angle 90^\circ \text{ V}$$

- Correntes de fase no motor

$$\underline{I}_{Am} = \underline{I}_{AN} = \frac{\underline{V}_{AN}}{\underline{Z}_m} = \frac{132,79 \angle -30^\circ}{5 + 5j} = \frac{132,79 \angle -30^\circ}{7,07 \angle 45^\circ} = 18,78 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{Bm} = 18,78 \angle 165^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{Cm} = 18,78 \angle 45^\circ \text{ A}.$$

- Correntes de fase e linha da carga

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{V}_{AB}}{\underline{Z}_c} = \frac{230 \angle 0^\circ}{10 - 5j} = \frac{230 \angle 0^\circ}{11,18 \angle -26,56^\circ} = 20,57 \angle 26,56^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{BC} = 20,57 \angle -93,44^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{CA} = 20,57 \angle 146,56^\circ \text{ A}$$

e

$$\underline{I}_{Ac} = \underline{I}_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ = 20,57 \angle 26,56^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 35,63 \angle -3,44^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{Bc} = 35,63 \angle -123,44^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{Cc} = 35,63 \angle 116,56^\circ \text{ A}$$

(b) Correntes totais de linha

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{Am} + \underline{I}_{Ac} = 18,78 \angle -75^\circ + 35,63 \angle -3,44^\circ = 40,43 - 20,28j = 45,23 \angle -26,64^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_B = 45,23 \angle -146,64^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_C = 45,23 \angle 93,36^\circ \text{ A}$$

(c) Potências

$$\bar{S}_{motor} = 3 \bar{V}_{AN} \bar{I}_{AN} = 3 \cdot 132,79 \angle -30^\circ \cdot 18,78 \angle 75^\circ = 5290,14 + 5290,14j = 7481,39 \angle 45^\circ \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{carga} = 3 \bar{V}_{AB} \bar{I}_{AB} = 3 \cdot 230,00 \angle 0^\circ \cdot 20,57 \angle -26,56^\circ = 12695,43 - 6346,32j = 14193 \angle -26,56^\circ \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{total} = \bar{S}_{motor} + \bar{S}_{carga} = 17985,57 - 1056,18j = 18016,55 \angle -3,36^\circ \text{ VA}$$

Como alternativa podemos calcular as potências por

$$S_{motor} = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \cdot 230,00 \cdot 18,78 = 7481,42 \text{ VA}$$

$$P_{motor} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi = 7481,42 \cdot \cos 45 = 5290,16 \text{ W}$$

$$Q_{motor} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi = 7481,42 \cdot \sin 45 = 5290,16 \text{ VAR}$$

$$S_{carga} = \sqrt{3} V_{AB} I_{Ac} = \sqrt{3} \cdot 230,00 \cdot 35,63 = 14193,98 \text{ VA}$$

$$P_{carga} = \sqrt{3} V_{AB} I_{Ac} \cos \varphi = 14193,98 \cdot \cos(-26,56^\circ) = 12696,04 \text{ W}$$

$$Q_{carga} = \sqrt{3} V_{AB} I_{Ac} \sin \varphi = 14193,98 \cdot \sin(-26,56^\circ) = -6346,62 \text{ VAR}$$

(d) Diagrama de fasores

Apresentamos o diagrama de fasores à Fig. 28.

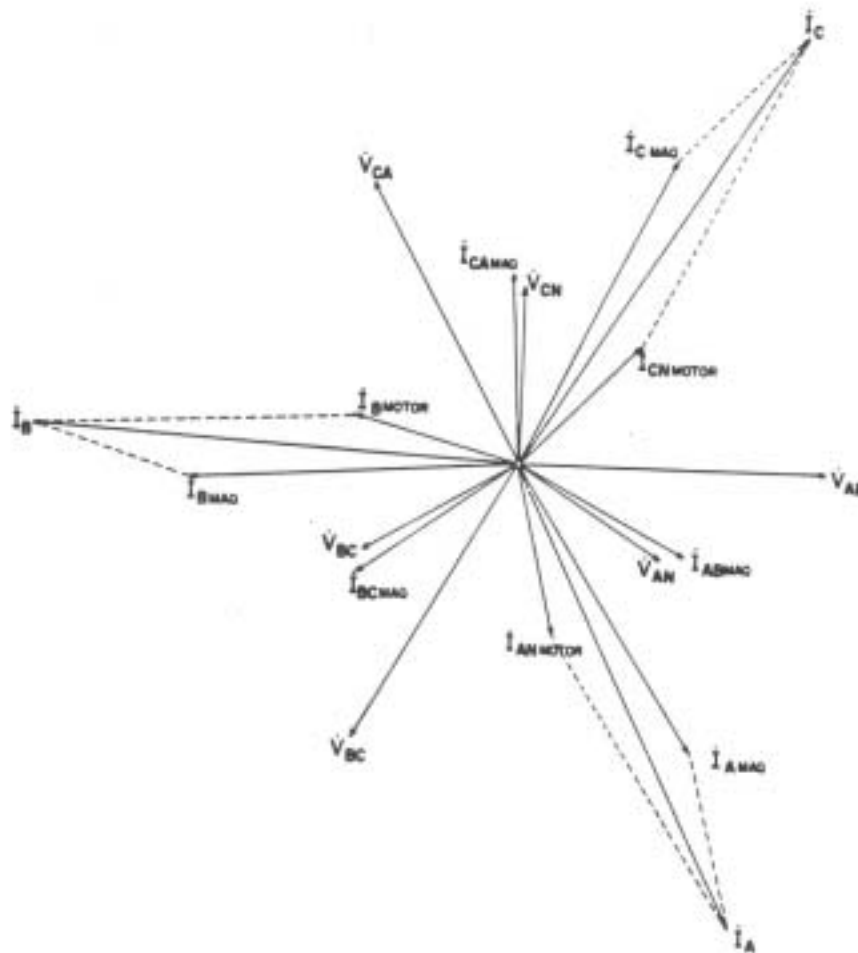


Figura 28. Diagrama de fasores para o Ex. 4.14

(e) Wattímetros

- Leitura nos wattímetros da carga

$$W_1 = \Re(\underline{V}_{AB} \underline{I}_{AC}^*) = \Re(230 \angle 0^\circ \cdot 35,63 \angle 3,44^\circ) = 230 \cdot 35,63 \cdot \cos(3,44^\circ) = 8180,13 \text{ W}$$

$$W_2 = \Re(\underline{V}_{CB} \underline{I}_{CC}^*) = \Re(-230 \angle -120^\circ \cdot 35,63 \angle -116,56^\circ) = 230 \cdot 35,63 \cdot \cos(-56,56^\circ) = 4515,91 \text{ W}$$

$$W_{12} = W_1 + W_2 = 8180,13 + 4515,91 = 12696,04 \text{ W}$$

- Leitura dos wattímetros no motor

$$W_1' = \Re(\underline{V}_{AC} \underline{I}_{AN}^*) = \Re(-230 \angle 120^\circ \cdot 18,78 \angle 75^\circ) = 230 \cdot 18,78 \cdot \cos(15^\circ) = 4172,22 \text{ W}$$

$$W_2' = \Re(\underline{V}_{BC} \underline{I}_{BN}^*) = \Re(230 \angle -120^\circ \cdot 18,78 \angle -165^\circ) = 230 \cdot 18,78 \cdot \cos(75^\circ) = 1117,94 \text{ W}$$

$$W_{12}' = W_1' + W_2' = 1117,94 + 4172,22 = 5290,16 \text{ W}$$

- Leitura total

$$W_{T1} = \Re(\underline{V}_{BA} \underline{I}_B^*) = \Re(-230 \angle 0^\circ \cdot 45,23 \angle 146,64^\circ) = 230 \cdot 45,23 \cdot \cos(33,36^\circ) = 8688,83 \text{ W}$$

$$W_{T2} = \Re(\underline{V}_{CA} \underline{I}_C^*) = \Re(230 \angle 120^\circ \cdot 45,23 \angle -93,36^\circ) = 230 \cdot 45,23 \cdot \cos(26,64^\circ) = 9298,54 \text{ W}$$

$$W_{T12} = 8688,83 + 9298,54 = 17987,38 \text{ W}$$

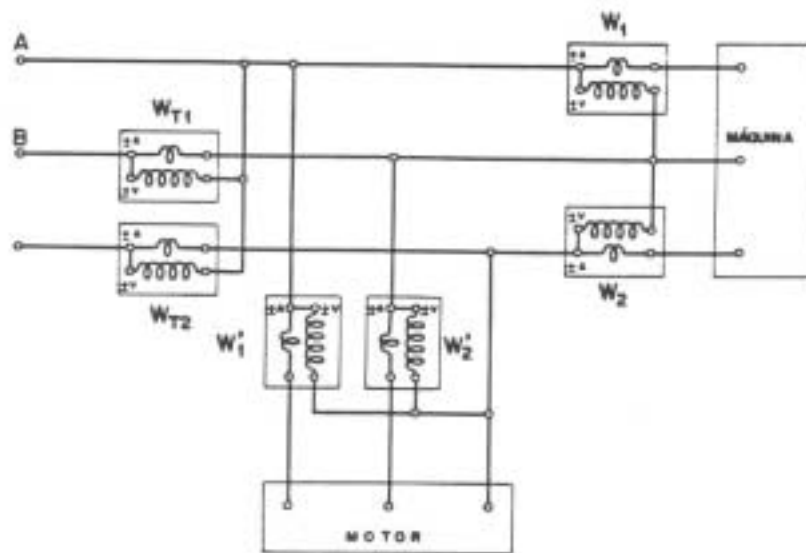


Figura 29. Ligação dos wattímetros para o Ex. 4.14

Ex. 4.15 - Um gerador de 220 V (tensão de linha), 60 Hz, trifásico simétrico, alimenta as seguintes cargas equilibradas:

- (1) Iluminação: 25 kW, fator de potência unitário.
- (2) Compressor: motor de indução de 100 cv com rendimento de 92 % e fator de potência 0,85 indutivo.
- (3) Máquinas diversas: motores de indução, totalizando 46,7 kW, com fator de potência 0,75 indutivo.

Pedimos:

- (a) A potência total fornecida pelo gerador.
- (b) O fator de potência global.
- (c) O banco de capacitores a ser instalado para que o fator de potência global da instalação seja 0,95 indutivo.
- (d) A corrente antes e após a inserção do banco de capacitores.

SOLUÇÃO

(a) Potência fornecida pelo gerador

- Tensões

Assumiremos seqüência de fase direta e a tensão de fase \underline{V}_{AN} com fase inicial nula, isto é

$$\begin{aligned} \underline{V}_{AN} &= \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{BN} &= \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{CN} &= \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ \text{ V}, \\ \underline{V}_{AB} &= 220 \angle 30^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{BC} &= 220 \angle -90^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{CA} &= 220 \angle 150^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

- Potência total

Temos:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ilum} &= (25,0 + 0j) \text{ kVA}, \\ \bar{S}_{comp} &= \frac{100,0 \cdot 0,736}{0,92} (1 + \tan(\cos^{-1} 0,85)j) = (80 + 49,58j) \text{ kVA}, \\ \bar{S}_{maq.} &= 46,7 + 46,7 \cdot \tan(\cos^{-1} 0,75)j = (46,7 + 41,18j) \text{ kVA}, \\ \bar{S}_{tot.} &= 151,7 + 90,76j = 176,777 \angle 30,89^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$

Observamos que a potência aparente não é a soma das potências aparentes das cargas. A potência ativa total, por sua vez, é igual à soma das potências ativas das cargas, o mesmo ocorrendo com a potência reativa, ou seja, as potências ativa e reativa se conservam.

(b) Fator de potência

Podemos definir o fator de potência, além dos modos já apresentados, pela relação entre as potências, ativa e aparente, absorvidas pela carga, isto é

$$\cos \varphi = \frac{151,7}{176,777} = \cos(30,89^\circ) = 0,8581$$

(c) Banco de capacitores para corrigir o fator de potência

Ao ligarmos, em paralelo com a carga, um banco de capacitores, a potência ativa absorvida pela carga, como é evidente, permanece inalterada, variando somente as potências reativa e aparente. Assim, sendo $\bar{S}_{banco} = 0 + j Q_{banco}$ a potência complexa absorvida pelo banco, teremos:

$$\bar{S}_{tot} + \bar{S}_{banco} = P_{tot} + j(Q_{tot} + Q_{banco}) = S / \psi$$

Considerando que desejamos que o fator de potência ($\cos \psi$) seja 0,95, resulta imediatamente

$$\tan \psi = \frac{Q_{tot} + Q_{banco}}{P_{tot}} = \tan(\arccos 0,95) = 0,3287$$

ou seja

$$Q_{banco} = P_{tot} \cdot 0,3287 - Q_{tot} = 151,7 \cdot 0,3287 - 90,76 = -40,896 \text{ kVar}$$

e a potência complexa do paralelo entre conjunto de cargas e o banco de capacitores passará a ser

$$\bar{S} = \bar{S}_{tot} + \bar{S}_{banco} = 151,7 + (90,76 - 40,896)j = 151,7 + 49,864j = 159,685 \angle 18,19^\circ \text{ kVA}$$

(d) Corrente sem e com banco de capacitores

A corrente antes da inserção do banco de capacitores é dada por

$$|I| = \frac{S_{tot}}{\sqrt{3} V} = \frac{176777}{\sqrt{3} \cdot 220} = 463,92 \text{ A}$$

e, lembrando nossa hipótese básica de geração e carga ligada em estrela, resulta

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AN} = I \frac{\underline{V}_{AN}}{|\underline{V}_{AN}| \angle \arccos(P/S)} = 463,92 \cdot \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 30,89^\circ} = 463,92 \angle -30,89^\circ \text{ A}$$

e

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BN} = 463,92 \angle -150,89^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CN} = 463,92 \angle 89,11^\circ \text{ A}$$

Por se tratar de trifásico simétrico e equilibrado procederemos, como método alternativo, ao cálculo da corrente, após a inserção do banco de capacitores, a partir da potência de fase, isto é

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AN} = \frac{\bar{S}^*}{3 \cdot \underline{V}_{AN}} = \frac{159685 \angle -18,19^\circ}{3 \cdot 127 \angle 0^\circ} = 419,06 \angle -18,19^\circ \text{ A}$$

e

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BN} = 419,06 \angle -138,19^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CN} = 419,06 \angle 101,81^\circ \text{ A}$$

Ex. 4.16 - Uma fábrica necessita instalar um compressor para recalcar água de um poço semi-artesiano (sistema *air-lift*). O compressor será alimentado por uma linha trifásica, que parte da cabine primária. Sabemos que a tensão de linha na cabine primária é 220 V, 60 Hz, que o motor, funcionando na condição de regime permanente, absorve 100 A, com fator de potência 0,7 indutivo, e que a impedância da linha vale $(0,10 + 0,05j) \Omega$. Pedimos:

- A tensão aplicada ao motor.
- A potência medida no motor e na cabine primária.
- O banco de capacitores a ser ligado em paralelo com o motor para que o fator de potência do conjunto passe a ser 0,95 indutivo. (Estudar ligação dos capacitores do banco em estrela e em triângulo).
- A tensão no motor com a presença do banco de capacitores.
- As perdas na linha com e sem a instalação do banco de capacitores.

SOLUÇÃO

- Hipóteses gerais

Admitiremos que o motor está ligado em estrela (caso estivesse ligado em triângulo poderíamos substituí-lo por um equivalente em estrela) e que o trifásico tem seqüência de fase direta.

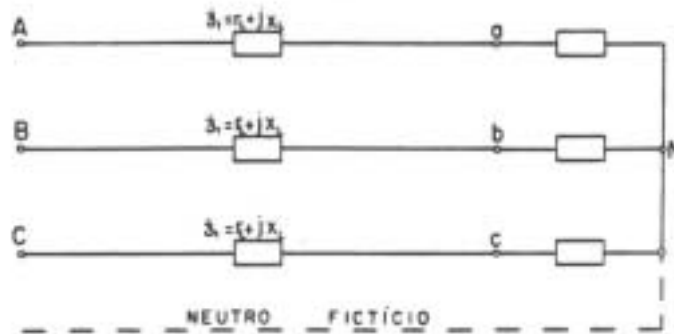


Figura 30. Circuito para o Ex. 4.16

(a) Tensões no motor e na cabine primária

Adotaremos que a tensão de fase no motor tem módulo V_m e fase inicial nula, isto é,

$$\mathcal{V}_{A'N} = V_m / 0^\circ, \quad \mathcal{V}_{B'N} = V_m / -120^\circ, \quad \mathcal{V}_{C'N} = V_m / 120^\circ.$$

A tensão de fase na cabine primária será dada por

$$\mathcal{V}_{AN} = \frac{220}{\sqrt{3}} / \psi, \quad \mathcal{V}_{BN} = \frac{220}{\sqrt{3}} / \psi - 120^\circ, \quad \mathcal{V}_{CN} = \frac{220}{\sqrt{3}} / \psi + 120^\circ$$

Além disso, temos que

$$\mathcal{V}_{AN} = \mathcal{V}_{A'N} + \bar{Z} \mathcal{I}_A$$

e, lembrando que a corrente da fase A está atrasada, em relação à tensão de fase (fase A), de arcos 0,7, obtemos

$$\mathcal{I}_A = 100 / -\cos^{-1}(0,7) = 100 / -45,57^\circ = (70 - 71,41j) \text{ A}$$

Nessas condições, sendo $\bar{Z} = 0,10 + 0,05j = 0,1118 / 26,56^\circ \Omega$, temos a equação

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}_{AN}| (\cos \psi + j \sen \psi) &= \bar{Z} \mathcal{I}_A + V_m, \quad \text{ou} \\ \frac{220}{\sqrt{3}} (\cos \psi + j \sen \psi) &= 0,1118 / 26,56^\circ \cdot 100 / -45,57^\circ + V_m \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 127 (\cos \psi + j \sen \psi) &= 11,18 / -19,01^\circ + V_m \\ 127 (\cos \psi + j \sen \psi) &= 10,57 - 3,64j + V_m \end{aligned}$$

e então, igualando as partes reais e as imaginárias, obtemos o sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} 127 \cos \psi &= 10,57 + V_m \\ 127 \sen \psi &= -3,64 \end{aligned}$$

que, resolvidas, fornecem

$$\psi = \arcsen\left(-\frac{3,64}{127}\right) = -1,64^\circ,$$

$$V_m = 127 \cdot \cos \psi = 127 \cdot 0,987 = 125,37 \text{ V}.$$

Destacamos que na determinação do ângulo ψ deveríamos ter considerado, além do valor $-1,64^\circ$, o ângulo $181,64^\circ$. Deixamos ao leitor a discussão do ângulo a ser fixado.

As tensões são dadas por

$$\begin{aligned} \underline{V}_{A_N} &= 116,38 \angle 0^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{B_N} &= 116,38 \angle -120^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{C_N} &= 116,38 \angle 120^\circ \text{ V}, \\ \underline{V}_{A'N} &= 127 \angle -1,64^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{B'N} &= 127 \angle -121,64^\circ \text{ V}, & \underline{V}_{C'N} &= 127 \angle 118,36^\circ \text{ V}. \end{aligned}$$

(b) Potência no motor e na cabine

No motor temos

$$\bar{S}_{mot} = 3 \underline{V}_{A_N} \underline{I}_A^* = 3 \cdot 116,38 \angle 0^\circ \cdot 100 \angle 45,57^\circ = 34914 \angle 45,57^\circ = (24441,10 + 24932,30j) \text{ VA}.$$

No gerador temos

$$\bar{S}_{ger} = 3 \underline{V}_{A'N} \underline{I}_A^* = 3 \cdot 127 \angle -1,64^\circ \cdot 100 \angle 45,57^\circ = 38100 \angle 43,93^\circ = (27439,16 + 26432,98j) \text{ VA}.$$

As perdas na linha são dadas por

$$\bar{S}_{ger} - \bar{S}_{mot} = (2998,06 + 1500,68j) \text{ VA}.$$

Lembramos que poderíamos ter calculado a potência no gerador a partir das perdas e da potência fornecida ao motor, isto é

$$\bar{S}_{ger} = \bar{S}_{mot} + \bar{S}_{perdas} = \bar{S}_{mot} + 3 |\underline{I}_A|^2 (R_{lin} + X_{lin}j),$$

ou seja

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ger} &= 24441,10 + 24932,30j + 3 \cdot 10000 \cdot (0,10 + 0,05j) = \\ &= 27441,10 + 26432,30j = 38100,92 \angle 43,93^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

(c) Correção do fator de potência

Para que o fator de potência do conjunto passe a ser 0,95 indutivo devemos ter (cfr. Ex. 2.2.23)

$$\bar{S} = P_{mot} (1 + j \tan \lambda) = \bar{S}_{mot} + \bar{S}_{banco},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= P_{mot} (1 + j \tan \lambda) = \bar{S}_{mot} + \bar{S}_{banco}, \text{ ou} \\ P_{mot} \tan \lambda &= Q_{mot} + Q_{banco}, \text{ ou} \\ 24441,10 \cdot 0,3287 &= 24932,30 + Q_{banco}, \text{ e} \\ Q_{banco} &= -16898,51 \text{ VAR} \end{aligned}$$

- Capacitores para o banco ligado em estrela

Num banco de capacitores ligado em estrela, sendo C_Y a capacidade instalada por fase, temos

$$Q_{banco} = 3 V_{fase}^2 (\omega C_Y), \text{ logo}$$

$$C_Y = \frac{Q_{banco}}{3 V_{fase}^2 \omega} = \frac{16898,51}{3 \cdot 127^2 \cdot (2\pi \cdot 60)} = 926,36 \mu\text{F}$$

(Obs: utilizamos a tensão de 127 V, considerando que seja a tensão nominal do banco)

- Capacitores para o banco ligado em triângulo

Num banco de capacitores ligado em triângulo, sendo C_Δ a capacidade instalada por fase, temos

$$Q_{banco} = 3 V_{linha}^2 (\omega C_\Delta), \text{ logo}$$

$$C_\Delta = \frac{C_Y}{3} = \frac{926,36}{3} = 308,79 \mu\text{F}$$

- Comparação dos bancos

Como já sabíamos o banco em triângulo apresenta capacidade menor que o em estrela. Para o caso de baixas tensões, sem entrarmos em outras considerações, tais como presença de harmônicas, que foge ao escopo do livro, poderíamos concluir que é mais vantajoso a utilização de bancos de capacitores em triângulo, no entanto, lembramos que na ligação em triângulo a tensão de isolamento dos capacitores, que estão supridos pela tensão de linha, é $\sqrt{3}$ vezes maior que a do banco em estrela, quando os capacitores são alimentados na tensão de fase. Em tensões de distribuição primária, ordem de grandeza de 15 kV, optamos pela ligação estrela uma vez que a redução da tensão prevalece sobre o aumento na capacidade a ser instalada.

(d) Cálculo da tensão no motor face à presença dos capacitores

Para o cálculo da tensão no motor com a instalação do banco de capacitores, que suporemos em estrela, temos o equacionamento a seguir:

$$\underline{V}_{AN} = \underline{V}_{A'N} + \bar{Z} (\underline{I}_{motor} + \underline{I}_{banco})$$

porém

$$\underline{V}_{A'N} = V_m \angle 0^\circ, \quad \text{e} \quad \underline{I}_{banco} = \underline{V}_{A'N} \cdot j\omega C = j\omega C V_m$$

Assumimos que o motor seja uma carga de corrente constante, isto é, que a corrente no motor não varie com a tensão que lhe é aplicada. Destacamos, sem entrar em maiores considerações, que fogem o escopo do livro, que o motor é melhor representado por uma carga de potência constante. Logo, na premissa considerada, a equação utilizada no cálculo da tensão do motor passa a ser

$$|\underline{V}_{AN}| (\cos \psi + j \sen \psi) = V_m (1 + j\omega C \cdot \bar{Z}) + \bar{Z} \underline{I}_{motor}$$

ou

$$\bar{Z} \underline{I}_{motor} = A + jB \quad \text{e} \quad \bar{Z} = R + jX$$

$$|\underline{V}_{AN}| (\cos \psi + j \sen \psi) = V_m (1 - \omega C X) + A + (B + \omega C R V_m) j$$

$$|\underline{V}_{AN}| \cos \psi = V_m (1 - \omega C X) + A$$

$$|\underline{V}_{AN}| \sen \psi = B + \omega C R V_m$$

Substituímos nas equações precedentes os valores numéricos e obtemos

$$127 \cos \psi = 0,9825 V_m + 10,57$$

$$127 \sen \psi = 0,0349 V_m - 3,64$$

e, elevando ambos os membros ao quadrado e somando as duas equações obtemos

$$0,96652 \cdot V_m^2 + 20,52 \cdot V_m - 16004,03 = 0.$$

Resolvemos a equação precedente e obtemos

$$V_m = 118,50 \text{ V} \quad \text{e} \quad \psi = 0,44^\circ, \quad \text{e}$$

$$\underline{V}_{A'N} = 118,50 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{B'N} = 118,50 \angle -120^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{C'N} = 118,50 \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$\underline{V}_{AN} = 127 \angle 0,44^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{BN} = 127 \angle -119,56^\circ \text{ V}, \quad \underline{V}_{CN} = 127 \angle 120,44^\circ \text{ V}$$

Destacamos que nos casos em que conhecemos a tensão no início da rede e a carga no fim da linha é mais usual procedermos ao cálculo por processo iterativo. Assim, no caso de assumirmos que a potência absorvida pelo motor é constante, e com a existência do banco de capacitores, teremos carga variando com a tensão, isto é, a corrente será dada por

$$\underline{I}_A = \frac{\bar{S}_{mot}^*}{3 \cdot \underline{V}_{A'N}} + j\omega C \underline{V}_{A'N}$$

O procedimento adotado consiste em fixarmos, para a iteração inicial, a tensão da carga igual à do gerador, e, a seguir, calculamos a corrente, através da equação acima, e a tensão na carga, pela equação

$$\underline{V}_{A'N} = \underline{V}_{AN} - \underline{I}_A \bar{Z}.$$

Repetimos o procedimento até que em duas iterações sucessivas o desvio da tensão na carga seja menor que tolerância pré-fixada, isto é

$$\left| V_{A'N}^{(k)} - V_{A'N}^{(k-1)} \right| \leq \text{TOLERÂNCIA}$$

(e) Perdas com a inserção do banco de capacitores

Com a inserção dos bancos de capacitores a corrente na linha passa a ser

$$\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_m + \mathcal{I}_{cap} = 100 \angle -45,57^\circ + \sqrt{3} \mathcal{I}_{A/N} \omega C \angle 90^\circ = 76,17 \angle -23,22^\circ \text{ A}$$

e as perdas na linha são

$$P_{perda} = 3 I^2 R = 3 \cdot 76,17^2 \cdot 0,1 = 1740,56 \text{ W}$$

$$Q_{perda} = 3 I^2 X = 3 \cdot 76,17^2 \cdot 0,05 = 870,28 \text{ W}$$

Destacamos os benefícios que advêm da utilização de capacitores para correção do fator de potência, no que tange à tensão e às perdas. Assim, a queda de tensão que valia $\frac{127 - 116,38}{127} \cdot 100 = 8,36 \%$ passa a ser

$\frac{127 - 118,50}{127} \cdot 100 = 6,69 \%$, com redução de cerca de 2%. Quanto às perdas, a redução, nas perdas ativas e reativas, amonta, respectivamente a $2998,06 - 1740,56 = 1257,7 \text{ W}$ e $1500,68 - 870,28 = 630,4 \text{ VAR}$, que correspondem a 5,15 % e 2,58 % da potência absorvida pelo motor.

Exercícios propostos

Ex. 4.17 - Para um circuito trifásico simétrico com carga equilibrada, ligada em triângulo, sabemos que a seqüência de fase é B-A-C e que a corrente $\mathcal{I}_C = 57 \angle -42^\circ \text{ A}$. Pedimos determinar a corrente na fase AB da carga.

Ex. 4.18 - Para o circuito trifásico simétrico com carga equilibrada da Fig. 31, sabemos que a seqüência de fase é C-B-A e a freqüência é 60 Hz. Pedimos determinar a tensão no gerador.

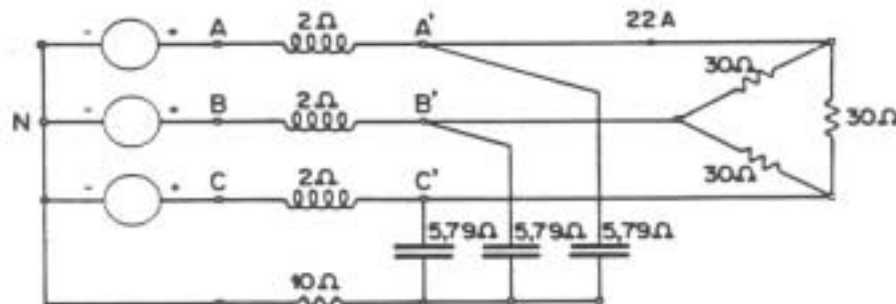


Figura 31. Circuito para o Ex. 4.18

Ex. 4.19 - Instalamos, numa indústria suprida em tensão de distribuição primária (13,8 kV - 60 Hz), dois wattímetros com as bobinas amperométricas, de cada um deles, nas fases A e B, e com as bobinas voltimétricas entre essas fases e a A. Anotamos, no período das 7 às 18 horas, de hora em hora, as leituras nos wattímetros, cujos valores estão apresentados à Tab. 4-1. Assumimos, por hipótese, que em cada intervalo de leitura a carga tenha se mantido constante e que seja indutiva. Pedimos

- (1) A seqüência de fase da tensão de alimentação.
- (2) O modo de ligação e a natureza de um conjunto de impedâncias que tornem, em todo o período de estudo, o fator de potência da indústria não menor que 0,9 indutivo, sem que venha a ser capacitivo.
- (3) Verificar se a linearização da curva de carga diária é satisfatória, dado que sabemos que a energia consumida no período das 7 às 18 horas foi de 67000 kWh

Tabela 4-1. Curva de medições de potência Ex. 4.19

| Tempo (h) | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------|------|------|------|------|-------|-------|
| W1 (kW) | 0,48 | 0,44 | 0,44 | 1,00 | -0,24 | -0,08 |
| W2 (kW) | 3,72 | 6,36 | 6,36 | 6,20 | 1,74 | 0,58 |

| Tempo (h) | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-----------|------|------|------|------|------|-------|
| W1 (kW) | 0,48 | 0,90 | 0,00 | 1,00 | 0,77 | -0,10 |
| W2 (kW) | 3,72 | 6,90 | 8,20 | 7,60 | 7,23 | 0,60 |



Figura 32. Diagrama unifilar para os Exs. 4.19

BIBLIOGRAFIA

OLIVEIRA, C.C.B.; SCHMIDT, H.P.; KAGAN, N.; ROBBA, E.J. **Introdução a sistemas elétricos de potência - Componentes simétricas - 2ª edição**. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.

ORSINI, L.Q. **Curso de circuitos elétricos**. São Paulo, Edgard Blücher, 1993-4, 2v.